MMATEMATIKA BISNIS

Pengarang

Yunia Mulyani Azis
Sussy Susanti

MATEMATIKA BISNIS

Yunia Mulyani Aziz

Sussy Susanti

MATEMATIKA BISNIS

EDISI CETAK PERTAMA 2019

Penyusun : Yunia Mulyani
Sussy Susanti

Editor : Henny Suharyati

Desain Sampul : Abyan Hanif

Penerbit : Lembaga Penelitian dan Pengabdian pada Masyarakat Universitas Pakuan

Alamat : Jalan Pakuan No. 1 Ciheuleut, Kelurahan Tegalega, Kecamatan Bogor Tengah, Kota Bogor – 16144

Email : lppm@unpak.ac.id

I S B N : 978-623-91228-3-6

PRAKATA

Buku Matematika Bisnis ini ditulis bertujuan membantu memberi pengertian kepada pembaca yang berminat mempelajari teknik penghitungan keuangan dalam aktivitas bisnis

Terdiri dari 6 (enam) bab buku ini terbagi kedalam materi-materi yang membahas tentang (1) Bunga sederhana dan bunga majemuk, (2) Tingkat diskon dan diskon tunai, (3) Barisan dan deret, (4) Penerapan Fungsi Linier dalam Ekonomi Bisnis, (5) Penerapan Non Linier dalam Ekonomi Bisnis, dan (6) Penerapan Matriks dalam Ekonomi Bisnis. Setiap pembahasan dilengkapi dengan soal beserta jawabannya, sehingga diharapkan pembaca akan lebih mudah memahai materi yang dibahas. Materi yang diuraikan dalam buku Matematika Bisnis ini mungkin masih banyak kekurangan yang tanpa disadari oleh penulis. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun dari pembaca. Kritik dan saran yang diberikan akan sangat dihargai oleh penulis dan nantinya akan digunakan untuk perbaikan pada edisi berikutnya.

Terima kasih penulis ucapkan kepada Kementrian Ristek Dikti yang telah mendanai hibah penelitian penulis dalam skim Penelitian Terapan Unggulan Perguruan Tinggi (PTUPT) dan STIE Ekuitas yang telah memberikan bantuan, masukan, dan dorongan dalam penulisan buku ajar ini. Semoga buku ini dapat memberikan manfaat yang banyak bagi pembaca

Juli 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1

BUNGA SEDERHANA & BUNGA MAJEMUK

Penerapan model bunga sederhana merupakan bagian dari aplikasi ekonomi untuk baris dan deret. Apabila seseorang melakukan investasi dan menerima bunga setiap tahun, maka untuk setiap tahun akan menerima sejumlah uang tertentu dalam jumlah yang sama dari bunga yang diberikan tersebut.

Konsep dasar model bunga mengukur nilai waktu dari uang *(time value of money).* Maksudnya, apabila seseorang memiliki sejumlah uang tertentu dan mengalokasikan uang tersebut pada bank tertentu, maka jumlah uang yang dimiliki orang tersebut akan berbeda antara nilai sekarang dan nilai di masa yang akan datang. Hal ini terjadi karena terdapat sejumlah bunga yang diberikan oleh pihak bank terhadap terhadap dana yang ditanamkan tersebut.

Bunga merupakan suatu balas jasa yang dibayarkan bilamana kita menggunakan uang. Jika kita meminjam uang dari bank maka kita membayar bunga kepada pihak bank tersebut. Jika kita menginvestasikan uang berupa tabungan atau deposito di bank maka bank membayar bunga kepada kita.

Bunga dilihat dari satu pihak merupakan pendapatan tetapi di lain pihak merupakan biaya. Di pihak yang meminjamkan merupakan pendapatan, sedang di pihak yang meminjam merupakan biaya. Jumlah uang yang dipinjamkan atau diinvestasikan di bank disebut modal awal atau pinjaman pokok(principal). Misalkan kita berinvestasi P rupiah dengan suku bunga tahunan i, maka pendapatan bunga pada akhir tahun pertama adalah Pi. Sehingga nilai akumulasi tahun pertama adalah P + Pi. Pada akhir tahun kedua adalah P+P(2i). Pada akhir tahun ketiga adalah P + P(3i). Demikian seterusnya sampai pada akhir tahun ke n nilai akumulasinya adalah P+P(ni).

Jadi pendapatan hanya didapatkan dari modal awal saja setiap akhir periode, sehingga nilai dari pendapatan bunga berjumlah tetap setiap tahun. Pendapatan bunga menurut metode ini disebut dengan bunga sederhana *(simple interst).*

Pendapatan bunga dapat dinyatakan dengan rumus:

$$\boxed{\mathbf{I = P.i.n}}$$

Untuk memperoleh nilai dari modal awal yang terakumulasi pada akhir tahun ke-n

(F_n) dapat dihitung dengan cara, modal awal (P) ditambah dengan semua pendapatan bunga selama periode waktu (n). Dapat dinyatakan dengan rumus berikut:

$$\boxed{\mathbf{F_n = P + P.}\boldsymbol{i.n}} \qquad \boxed{\mathbf{F_n = P. (1 + }\boldsymbol{i.n}\mathbf{)}}$$

Dimana:

I = Jumlah pendapatan bunga

P = Pinjaman pokok atau Modal awal/Nilai saat ini *(Principal)*

i = tingkat bunga tahunan

n = periode/waktu

Fn = Nilai pada masa ke-n *(Future value)*

Dalam transaksi bisnis dan keuangan, kita juga perlu memperkirakan nilai sekarang dari suatu nilai masa datang pada jumlah uang tertentu. Jika nilai dari masa yang akan dating (F_n), tingkat bunga (i), dan jangka waktu (n) telah diketahui, maka rumus untuk memperoleh nilai saat ini (P) adalah :

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{Fn}{(1+i.n)}}$$

Contoh 1:

Hitunglah pendapatan bunga sederhana dan nilai yang terakumulasi dimasa datang dari jumlah uang Rp. 5.000.000 yang disimpan di bank selama 5 tahun dengan bunga 12% per tahun!

Penyelesaian:

Diketahui: P = Rp. 5.000.000; n = 5; i = 0,12

Ditanyakan : I dan F_5

Jawab:

I = Rp. 5.000.000 (5)(0,12) = Rp. Rp. 3.000.000

F_5 = Rp. 5.000.000 . (1 + 0,12(5)) = Rp. 8.000.000

Contoh 2:

Adi mempunyai hutang yang setelah 8 bulan besarnya menjadi Rp. 2.280.000. perhitungan beban bunga berdasarkan sistem bunga sederhana sebesar 21% per tahun.

Tentukan besarnya nilai pokok pinjaman Adi!

Penyelesaian:

Diketahui: $F_{2/3}$ = Rp. 2.280.000; n = 8 bln = 2/3 thn; i = 0,21

Ditanyakan: P

Jawab:

$$P = \frac{Rp.2.280.000}{(1+0,21\frac{2}{3})}$$

$$= Rp.\ 2.000.000$$

Cara menggunakan kalkulator scientific untuk perhitungan di atas: Tekan 2280000

$\boxed{:}$ ($\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{0}$ $\boxed{,}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{x}$ $\boxed{2}$ $\boxed{:}$ $\boxed{3}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Contoh 3:

Sebuah modal sebesar Rp. 5,000,000 disimpan di bank dengan sistem bunga sederhana. Setelah 3 t/ahun kemudian menjadi sebesar Rp. 7.250.000. berapa persen besarnya bunga yang dikenakan terhadap modal tersebut?

Penyelesaian:

Diketahui: P= Rp. 5.000.000; F_3= Rp. 7.250.000; n= 3

$$F_n = P.(1+ i.n)$$

$$Rp.\ 6.000.000 = Rp.\ 5.000.000\ .(1 +3i)$$

$$1 +3i = \frac{7.250.000}{5.000.000}$$

$$1 +3i = 1,45$$

$$3i = 1,45 - 1$$

$$3i = 0,45$$

$$i = 0,45 : 3 = 0,15 = 15\%$$

Contoh 4:

Modal sebesar Rp. 2.000.000 ditabung di bank dengan bunga sederhana sebesar 15%. Setelah beberapa tahun modal tersebut menjadi sebesar Rp.5.000.000. Berapa tahunkah lamanya modal tersebut ditabung di bank?

Penyelesaian:

Diketahui: P= Rp. 2.000.000; i= 0,15; F_n= Rp. 5.000.000 $F_n = P.\ (1 + i.n)$

$$\text{Rp. } 5.000.000 = \text{Rp. } 2.000.000\ .(1 + 0{,}15n)$$

$$1 + 0{,}15n = \frac{5.000.000}{2.000.000}$$

$$1 + 0{,}15n = 2{,}5$$

$$0{,}15n = 2{,}5 - 1$$

$$0{,}15n = 1{,}5$$

$$n = 1{,}5 : 0{,}15 = 10 \text{ tahun}$$

Model bunga majemuk juga merupakan penerapan bagian dari aplikasi ekonomi untuk baris dan deret. Pada model bunga majemuk, bunga yang dihitung diakumulasikan.

Misalkan suatu investasi dari P rupiah pada tingkat bunga i per tahun, maka pendapatan bunga pada tahun pertama adalah Pi, selanjutnya nilai investasi ini pada akhir tahun pertama akan menjadi

$$P + Pi = P\ (1 + i)$$

Hasil dari P(1+i) dianggap sebagai modal awal pada permulaan tahun kedua dan pendapatan bunga yang diperoleh adalah P(1+i)i.

Sehingga hasil nilai investasi pada akhir tahun kedua adalah

$$P(1+i) + P(1+i)I = P+Pi+Pi+Pii = P(1+2i+i^2) = P(1+i)^2$$

Selanjutnya hasil dari $P(1+i)^2$ dianggap sebagai modal awal pada permulaan tahun ketiga dan pendapatan bunga yang diperoleh $P(1+i)^2i$, Sehingga total investasi tahun ketiga adalah

$$P(1+i)^2 + P(1+i)^2i = P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$$

Demikian seterusnya sampai pada tahun ke-n sehingga rumusnya adalah

$$\boxed{\mathbf{F_n = P.(1+i)^n}}$$

Dimana

F_n = Nilai masa datang

P = Nilai sekarang

i = bunga per tahun

n = jumlah tahun

Jadi, pendapatan bunga yang diinvestasikan kembali pada modal awal untuk setiap permulaan periode disebut dengan bunga majemuk. Pendapatan bunga dari model bunga majemuk ini jumlahnya akan meningkat setiap periode disebabkan karena modal awal yang meningkat setiap permulaan periode.

Dalam praktek bisnis sehari-hari seperti pada bank-bank komersial, frekuensi pembayaran bunga kepada nasabah dilakukan bukan hanya satu kali dalam setahun, melainkan lebih dari satu kali. Misalnya pembayaran bunga majemuk secara semesteran, kuartalan, bulanan, atau harian.

Frekuensi pembayaran bunga ini dilambangkan (m) kali dalam setahun, maka nilai masa datangnya digunakan rumusan:

$$\boxed{F_n = P.\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{(n)(m)}}$$

Dimana:

F_n = nilai masa datang tahun ke-n

P = nilai saat ini/sekarang

i = tingkat bunga per tahun n = jumlah tahun

m = frekuensi pembayaran bunga dalam setahun

Contoh 1:

Bapak James mendepositokan uangnya di Bank sebesar Rp. 5.000.000 dengan tingkat bunga yang belaku 12% per tahun dimajemukkan, berapa nilai total deposito Bapak James pada akhir tahun ketiga? Berapa banyak pula pendapatan bunganya?

Penyelesaian :

Diketahui P = Rp. 5.000.000; i=0.12; n=3 Ditanyakan: F_3 dan I

$F_n = P(1+i)^n$

F_3 = Rp. 5.000.000 $(1+0.12)^3$ = Rp 5.000.000$(1,12)^3$

= Rp. 7.024.640

I = Rp. 7.024.640 - Rp. 5.000.000 = Rp 2. 024.640

Contoh 2:

Nona Ana ingin menabung uangnya Rp. 5.000.000 dengan tingkat bunga 12% per tahun. Berapakah nilai uangnya di masa dating setelah 5 tahun kemudian jika dibunga majemukkan secara:

a. Semesteran
b. Kuartalan
c. Bulanan
d. Harian

Penyelesaian:

Diketahui: P = Rp 5.000.000; i = 0,12; n = 5

Pembayaran bunga semesteran (m = 2)

$$F_5 = \text{Rp } 5.000.000 .(1 + \frac{0,12}{2})^{(5)(2)} = \text{Rp } 5.000.000 .(1,06)^{10}$$

$$= \text{Rp. } 8.954.238,48$$

a. Pembayaran bunga kuartalan (m = 4)

$$F_5 = \text{Rp } 5.000.000 .(1 + \frac{0,12}{4})^{(5)(4)} = \text{Rp. } 5.000.000 .(1,03)^{20}$$

$$= \text{Rp. } 9.030.556,17$$

b. Pembayaran bunga bulanan (m = 12)

$$F_5 = \text{Rp } 5.000.000 .(1 + \frac{0,12}{12})^{(5)(12)} = \text{Rp. } 5.000.000 .(1,01)^{60}$$

$$= \text{Rp. } 9.083.483,49$$

c. Pembayaran bunga harian (m = 365)

$$F_5 = \text{Rp } 5.000.000 .(1 + \frac{0,12}{365})^{(5)(365)} = \text{Rp. } 9.109.695,66$$

Untuk mengetahui nilai uang yang harus diinvestasikan saat ini agar mempunyai jumlah tertentu pada akhir tahun ke-n, dapat diperoleh dengan rumusan berikut:

$$\boxed{P = \frac{Fn}{(1+i)^n}}$$

Jika pembayaran bunga majemuk dilakukan beberapa kali dalam setahun, maka untuk mencari nilai sekarang digunakan rumusan:

$$\boxed{P = \frac{Fn}{(1+\frac{i}{m})^{n.(m)}}}$$

Contoh 3:

Nyonya Selly merencanakan uang tabungannya di bank pada tahun ke-5 akan berjumlah Rp. 15.000.000 dengan bunga yang dimajemukkan. Tingkat bunga yang berlaku 15% per tahun. Berapa jumlah uang yang harus ditabungkan Nyonya Selly saat ini?

Penyelesaian:

Diketahui: F_3= Rp. 15.00 0.000; i= 0,15; n= 5

$$P = \frac{Fn}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{Rp.15.000.000}{(1+0,15)^5} = Rp.\ 7.457.651,03$$

Cara menggunakan kalkulator scientific untuk perhitungan di atas: Tekan

15000000 $\boxed{:}$ ($\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{0}$ $\boxed{,}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{)}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

Contoh 4:

Pak Rudy seorang pengusaha berharap 5 tahun kemudian akan mendapatkan dana sebanyak Rp. 20.000.000. Jika tingkat bunga yang berlaku saat ini 12% per tahun dan dibayarkan secara kuartalan, berapa jumlah dana yang harus ditabung Pak Rudy saat ini?

Penyelesaian:

Diketahui: F_5= Rp. 20.000.000; i= 0,12; n= 5; m= 4

$$P = \frac{Fn}{(1+\frac{i}{m})^{n.(m)}}$$

$$P = \frac{Rp.20.000.000}{(1+\frac{0,12}{4})^{5.(4)}} = \frac{Rp.20.000.000}{(1,03)^{20}} = Rp.\ 11.073.515,08$$

Cara menggunakan kalkulator scientific untuk perhitungan di atas:

Tekan 20000000 $\boxed{:}\ \boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{0}\ \boxed{,}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{:}\ \boxed{4}\ \boxed{)}\ \boxed{y^x}$
$\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$

Contoh 5:

Modal sebesar Rp. 2.000.000 disimpan di bank dengan bunga majemuk. Setelah 3 tahun modal tersebut menjadi sebesar Rp. 2.809.856. Berapa persen besarnya bunga majemuk yang dikenakan terhadap modal tersebut?

Penyelesaian:

Diketahui: P= Rp. 2.000.000; F_3= Rp. 2.809.856; n= 3

$F_n = P.(1+i)^n$

Rp. 2.809.856 = Rp. 2.000.000 .$(1 + i)^3$

$(1 + i)^3 = \frac{\text{Rp.2.809.856}}{\text{Rp.2.000.000}}$

$(1 + i)^3 = 1,405$

$1 + i = \sqrt[3]{1,405}$

$1 + i = 1,12$

$i = 1,12 - 1$

$i = 0,12 = 12\%$

Cara menghitung $\sqrt[3]{1,405}$ menggunakan kalkulator scientific:

- **Tekan 1,405** $\boxed{\text{shift}}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$
- $\boxed{\text{2ndf}}\ \boxed{X^3}$ **1,405** $\boxed{=}$

Contoh 6:

Modal sebesar Rp. 5.000.000 setelah ditabung dengan bunga 15% per tahun yang dimajemukkan semesteran akan menjadi Rp. 21.239.255. Berapa tahun lamanya modal tersebut ditabungkan?

Penyelesaian:

Diketahui: P= Rp. 5.000.000; i= 0,15; F_n= Rp. 21.239.255; m=2

$$F_n = P.\left(1 + \frac{\square}{\square}\right)^{(n)(m)}$$

$$Rp.\ 21.239.256 = Rp.\ 5.000.000\ .\left(1 + \frac{0,15}{2}\right)^{2n}$$

$$\left(1 + \frac{0,15}{2}\right)^{2n} = \frac{Rp.21.239.255}{Rp.5.000.000}$$

$$\left(1 + \frac{0,15}{2}\right)^{2n} = 4,25$$

$$1,075^{2n} = 4,25$$

$$2n\ .\log 1,075 = \log 4,25$$

$$2n = \frac{\log 4,25}{\log 1,075}$$

$$2n = \frac{0,63}{0,03}$$

2n = 20 …….n = 10 tahun

SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Pak Tedi menyimpan uang di bank sebesar Rp. 2.700.000 dalam Bentuk deposito dengan bunga sederhana 15% per tahun. Jika deposito tersebut jatuh tempo setelah 4 bulan. Tentukan besarnya uang Pak Tedi setelah jatuh tempo!
2. Hutang si Budi setelah 9 bulan besarnya menjadi Rp. 1.150.000. Jika perhitungan bunga tunggal se
3. besar 20% pertahun. Hitung besarnya nilai tunai hutang si Budi!
4. Sebuah modal sebesar Rp. 5.000.000 disimpan di bank dengan bunga tunggal 12,5% pertahun. Beberapa tahun kemudian modal tersebut menjadi sebesar Rp. 7.500.000. Berapa tahunkah lamanya modal tersebut disimpan di bank?
5. Seorang pedagang membutuhan modal tambahan untuk usahanya sehingga ia meminjam uang sebesar Rp15.000.000,- yang harus dilunasi dalam waktu 9 bulan sebesar Rp 18.375.000,- .Berapa tingkat bunga sederhana tahunan atas pinjaman tersebut?
6. Seorang pedagang membutuhan modal tambahan untuk usahanya sehingga ia meminjam uang sebesar Rp 15.000.000,- yang harus dilunasi dalam waktu 9 bulan menjadi sebesar Rp 18.375.000,-. Berapa tingkat bunga sederhana tahunan atas pinjaman tersebut?
7. Tuan X meminjam uang Rp. 1.000.000 pada bank ABC dengan perjanjian bahwa setelah 3 thn kemudian Tuan X harus mengembalikan sejumlah Rp.
   1.650.000. Hitung berapa persen tingkat bunga majemuk yang dibebankan pada Tuan X?
8. Dodi mendepositokan uangnya sejumlah Rp. 625.000 pada sebuah bank yang memberikan bunga 15% per tahun yang dibayarkan tiap 6 bulan secara majemuk selama jangka waktu tertentu. Agar pada akhir jangka waktu tersebut Dodi menerima uang sejumlah Rp. 1.000.000. Hitunglah selama berapa tahun Dodi harus mendepositokan uangnya?
9. Modal sebesar Rp. 200.000 akan dibayarkan 10 tahun kemudian dengan bunga 4% pertahun yang dimajemukkan semesteran. Berapa nilai tunai modal tersebut?

10. Jika uang sebesar Rp. 2.000.000 ditabung di bank selama 5 tahun dengan bunga 6% per tahun. Berapa jumlah uang tersebut bila dibunga majemukkan secara kuartalan?
11. Berapa besarkah modal awal jika 5 tahun yang lalu Abdul Karim menyimpankan uangnya di Bank yang pada saat ini ia menerima sebesar Rp 56.086.827,00 dengan suku bunga yang diberikan Bank adalah 9% pertahun dengan sistem pembayaran bunga tiap 4 bulan dengan bunga majemuk.
12. Mr. Y meminjam uang Rp. 2.000.000 pada Bank ABC dengan ketentuan setelah 3 tahun Mr.Y harus mengembalikan 2.600.000. Hitung berapa persen bunga majemuk yang dibebankan kepada Mr.Y!
13. Tuan A mendepositokan uangnya sejumlah Rp. 1.000.000 pada sebuah bank yang memberikan bunga 12% per tahun dimajemukkan secara kuartalan. Agar pada akhir jangka waktu Tuan A menerima Rp. 2.250.000. Hitung selama berapa tahun Tuan A harus mendepositokan uangnya? (pembulatan 2 tempat desimal)

BAB 2

TINGKAT DISKON DAN DISKON TUNAI

Diskon (*Discount*) biasa digunakan untuk menarik minat pembeli dalam menjual barangnya.
Diskon tunai digunakan untuk mendorong pembayaran lebih cepat sebelum jatuh tempo.
Tingkat diskon digunakan untuk menghitung bunga wesel atau bunga pinjaman yang di potong di muka. Potongan bunga di muka ini menyebabkan tingkat bunga efektif yang dikenakan menjadi lebih tinggi jika dibandingkan dengan pembayaran bunga yang dilakukan diakhir periode.

1. Diskon dan Tingkat Diskon

Faktor diskon atau pendiskontoan dengan bunga sederhana, yaitu proses menghitung P dengan diberikan S, r, dan t. Selisih S – P atau D disebut diskon sederhana (*simple discount*) atau diskon bank (*bank discount*) pada tingkat bunga tertentu. Disini *simple discount* atau *bank discount* disebut **diskon**.

Contoh 2.1: Berapa besar diskon dari Rp 8.000.000,- selama 9 bulan pada tingkat bunga 10%?

Jika yang diberikan bukan tingkat bunga (r) tetapi tingkat diskon (d) maka kita menggunakan persamaan lain yang menghubungkan variabel D (discount-diskon) dengan S (*Sum* – jumlah nominal akhir), d (discount rate – tingkat diskon), dan t (time – waktu).

Diskon (D) dari jumlah (S) selama t tahun dengan tingkat diskon (d) adalah:

$$\mathbf{D = S\ d\ t}$$

Sedangkan,

$$\mathbf{P = S - D}$$

Dengan melakukan substitusi persamaan di atas:

$$\mathbf{P = S - D}$$

$$\mathbf{P = S - (S\ d\ t)}$$

$$\mathbf{P = S\ (1 - d\ t)}$$

Berdasarkan persamaan diatas kita dapat melihat bahwa bunga, lebih tepatnya diskon dapat di hitung dari nilai akhir (S) dengan menggunakan tingkat diskon, selain menggunakan tingkat bunga. Hal ini sering dilakukan terutama untuk pinjaman jangka pendek. Pemberi pinjaman menghitung Diskon (D) dari S atau nilai yang seharusnya dibayar pada tanggal jatuh tempo dengan menggunakan tingkat diskon *(discount rate)* dan bukan menggunakan tingkat bunga *(interest rate)*.

Oleh karena itu istilah diskon juga sering juga disebut sebagai bunga dipotong di muka. Perbedaan tingkat bunga dan tingkat diskon hanya berlaku untuk sekuritas pasar uang dan tidak untuk sekuritas yang lainnya (saham dan obligasi). Untuk jangka menengah atau jangka panjang (lebih dari satu tahun), tingkat diskon dan tingkat bunga berarti sama sehingga hanya ada satu persamaan untuk mencari nilai sekarang (pendiskontoan). Artinya, jika digunakan dalam jangka menengah dan jangka panjang, tingkat bunga adalah tingkat diskon dan sebaliknya.

2. Manipulasi Persamaan Diskon

$$S = \frac{P}{1 - dt}$$

Persamaan ini sering digunakan untuk menghitung nilai akhir atau nilai jatuh tempo dari sebuah pinjaman sebesar P yang sudah diterima di muka.

Contoh 2.2: Bapak Tri meminjam Rp 50.000.000,- selama 6 bulan dari sebuah bank yang mengenakan tingkat diskon 12%. Berapakah besarnya diskon dan berapa uang yang diterima bapak Tri?

Contoh 2.3: Melanjutkan contoh diatas, berapa pinjaman yang harus bapak Tri ajukan supaya ia dapat menerima uang tunai sebesar Rp 50.000.000,- secara penuh?

Contoh 2.4: Hitunglah nilai sekarang (present value – PV) dari Rp 10.000.000,- yang jatuh tempo satu tahun lagi dengan:

a. Tingkat bunga 10%.
b. Tingkat diskon 10%.

Penggunaan tingkat diskon selalu memberikan keuntungan yan lebih besar kepada pemberi pinjaman (dalam kasus ini adalah bank) dibandingkan dengan penggunaan tingkat bunga yang besarnya sama.

Kita dapat menghitung tingkat bunga yang ekuivalen dengan tingkat diskon tertentu dan juga sebaliknya. Tingkat diskon (d) dan tingkat bunga (r) adalah ekuivalen jika kedua variabel tersebut memberikan nilai sekarang (PV) yang sama untuk nilai S yang sama dikemudian hari.

Dengan menggunakan persamaan ini:

$$\frac{S}{(1 + rt)} = S(1 - dt)$$

$$\frac{1}{(1 - dt)} = 1 + rt$$

$$\frac{1}{(1-dt)} - 1 = rt$$

$$d = \frac{r}{1+rt}$$

$$\frac{1-(1-dt)}{(1-dt)} = rt$$

$$d = \frac{10\%}{1+(10\% \times 0{,}5)} = 9{,}52\%$$

$$\frac{dt}{(1-dt)} = rt$$

$$\frac{\boldsymbol{d}}{(\boldsymbol{1-dt})} = \boldsymbol{r}$$

Dengan cara yang sama:

$$\frac{\mathrm{S}}{(1+\mathrm{rt})} = \mathrm{S}(1-\mathrm{dt})$$

$$\frac{1}{(1+rt)} = 1 - dt$$

$$-\frac{1}{(1+rt)} + 1 = dt$$

$$\frac{-1+(1+rt)}{(1+rt)} = dt$$

$$\frac{rt}{(1+rt)} = dt$$

$$\frac{\boldsymbol{r}}{(\boldsymbol{1+rt})} = \boldsymbol{d}$$

Contoh 2.5: Jika diketahui tingkat diskon sebuah bank adalah 9%, berapakah tingkat bunga yang ekuivalen untuk t = 1?

$$r = \frac{d}{1-dt}$$

$$r = \frac{9\%}{1-(9\% \times 1)} = 9{,}89\%$$

Contoh 2.6: Jika diketahui tingkat bunga sebuah bank adalah 10%, berapakah tingkat diskon yang ekuivalen untuk periode 6 bulan?

3. Wesel

Wesel (*promissory notes*) adalah janji tertulis seseorang debitor. Di sebut pembuat wesel untuk pembayar kepada, atau atas perintah dari, kreditor atau penerima wesel sejumlah uang, dengan bunga atau tanpa bunga, pada tanggal tertentu. *Promissory notes* sering disingkat *Pro-notes* atau *P-notes*. *Promissory notes* yang mengandung bunga disebut wesel berbunga (*interest-bearing notes*) sedangkan yang tidak berbunga disebut wesel tidak berbunga (*non-interest bearing notes*). Dalam akuntansi, *promissory notes* juga disebut wesel tagih (*notes receivable*) untuk yang menerima dan wesel bayar (*notes payable*) untuk yang membuat.

Berikut ini adalah sebuah contoh yang paling sederhana dari wesl berbunga dengan nilai nominal Rp 100.000.000,-. Tanggal penerbitan wesel tersebut adalah 1 Juli 2006 dan jatuh tempo dalam 60 hari atau tanggal 30 Agustus 2006 dengan bunga 11%. Nilai wesel pada saat jatuh tempo adalah Rp 100.000.000 x (1+0,11(60/365)) = Rp 101.808.219,20

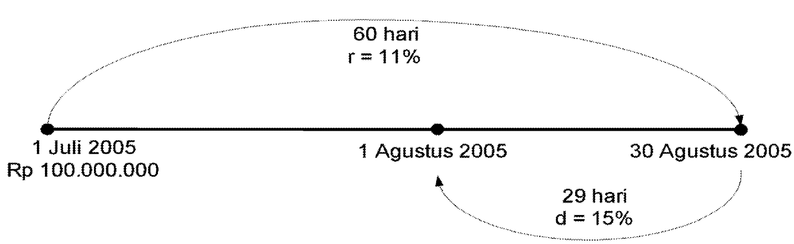
Sebuah wesel dapat dijual satu atau berulang kali sebelum tanggal jatuh temponya. Setiap pembeli akan menghitung diskon dari tanggal penyerahan hingga tanggal jatuh tempo menggunakan tingkat diskonnya. Nilai jatuh tempo dikurangin diskon adalah nilai yang akan diterima oleh penjual.

Contoh 2.7:

Jika wesel yang ditandatangani Tuan Achmad di atas pada tanggal 1 Agustus 2006 dijual oleh Tuan Bachtiar kepada bank AAA dengan menggunakan tingkat diskon 15%, hitunglah:

a. Berapa yang akan diterima Tuan Bachtiar?
b. Berapa tingkat bunga yang akan diterima bank atas investasinya dalam wesel di atas jika wesel tersebut dipegang hingga tanggal jatuh tempo?
c. Berapa tingkat bunga yang didapat Tuan Bachtiar ketika ia menjualnya pada tanggal 1 Agustus 2006?

Pertama kita perlu membuat diagram waktu dan nilai sebagai berikut:



a. Jumlah yang akan diterima oleh Tuan Bachtiar :

Nilai jatuh tempo wesel adalah :

$$S = Rp\,100.000.000 \times \left(1 + 0{,}11\left(\frac{60}{365}\right)\right)$$

$$S = Rp\,101.808.219{,}2$$

Nilai yang akan diterima penjual pada 1 *Agustus* 2005 *adalah* :

$$P = Rp\,101.808.219{,}2 \times \left(1 - 0{,}15\left(\frac{29}{365}\right)\right)$$

$$P = Rp\,100.594.888{,}4$$

Jadi:

P	= Rp 100.594.888,4
SI	= Rp 1.213.330,8
t	= 29 hari

$$r = \frac{Rp.\,1.213.330{,}8}{\text{Rp. }1.005.948.884 \text{ x } \frac{29}{365}} = 0{,}15181 = 15{,}18\%$$

Bank akan memperoleh Rp 1.213.330,8 (Rp 101.808.219,2 – Rp 100.594.888,4) untuk investasi sebesar Rp 100.594.888,4 selama 29 hari.

Cara lain adalah menghitung yang ekuivalen dengan d =15%

$$r = \frac{\text{d}}{1 - \text{dt}} = \frac{0{,}15}{1 - 0{,}15[\frac{29}{365}]} = 0{,}15181 = 15{,}18\%$$

C. Tuan Bachtiar mendapatkan bunga sebesar Rp 594.888,4 untuk investasi Rp 100.000.000 selama 31 hari. Tingkat bunga yang ia dapatkan adalah:

$$r = \frac{SI}{Pt}$$

$$r = \frac{Rp\,594.888,4}{Rp\,100.000.000 \times \left(\frac{31}{365}\right)}$$

$$r = 0,07004 = 7\%$$

Contoh 2.8:

Pada tanggal 15 April 2016 Tuan Emil menandatangani wesel bernilai Rp 80.000.000. Wesel tersebut akan jatuh tempo dalam 2 bulan dengan bunga 12%. Pada tanggal 10 Mei 2016, pemegang wesel tersebut menjualnya ke bank yang mengharapkan tingkat bunga 13%. Berapakah yang diterima pemegang wesel?

Contoh 2.9: Pada tanggal 21 April 2006, Khalid membeli barang seharga Rp 5.000.000. Jika ia membayar tunai, ia akan mendapatkan diskon atau potongan sebesar 4%. Untuk memanfaatkan potongan ini, ia menandatangani sebuah wesel tanpa bunga berjangka waktu 90 hari di bank yang mengenaan tingkat diskon 9%. Berapa nilai nominal wesel tersebut agar pedagang tadi mendapatkan jumlah uang tunai (kas) yang pas untuk pembayaran barangnya?

4. Diskon Tunai

Untuk mendorong pembayaran yang lebih cepat, banyak produsen dan pedagang grosir menawarkan potongan tunai untuk pembayaran jauh sebelum tanggal jatuh tempo. Besarnya potongan dan syaratnya biasanya dinyatakan dalam **termin kredit** (*credit terms*), seperti 2/10, n/30, yang artinya **potongan tunai** atau **diskon tunai** (*cash discount*) sebesar 2% akan diberikan jika pembayaran dilakukan dalam waktu 10 hari. Jika tidak, jumlah keseluruhan harus dilunasi dalam waktu 30 hari. Pembeli yang akan memanfaatkan potongan tunai, pada praktiknya akan menerima potongan atau bunga di muka dalam bentuk diskon tunai. Tingkat bunga efektif yang didapatkan dengan cara ini biasanya sangat tinggi.

Contoh 2.10:

Seorang pedagang membeli sebuah peralatan kantor seharga Rp 40.000.000,-dengan termin kredit 4/30, n/100. Berapakah tingkat bunga efektif yang ditawarkan kepada pedagang tadi? (**Catatan:** jika pedagang tadi ingin mendapatkan potongan maka ia akan membayar pada hari ke-30 dan jika tidak, ia harus membayar barang yang dibelinya pada hari ke-100 atau ada perbedaan waktu 70 hari).

Jawab:

Besarnya diskon adalah 4% atau sebesar Rp 1.600.000 (4% x Rp 40.000.000)

P = Rp 40.000.000 – Rp 1.600.000 = Rp 38.400.000

SI = Rp 1.600.000

t = $\frac{70}{365}$

Cara 1 :

$$r = \frac{SI}{Pt}$$

$$r = \frac{Rp1.600.000}{Rp38.400.000 \times \left(\frac{70}{365}\right)}$$

$$r = 0{,}21726 = 21{,}73\%$$

Cara 2 :

$$r = \frac{365}{70} \times \frac{0{,}04}{0{,}96}$$

$$r = 0{,}21726 = 21{,}73\%$$

Latihan:

1. Berapa besarnya diskon dari uang sejumlah Rp 200.000.000 selama 6 bulan pada tingkat diskon 10% p.a?
2. Berapa besarnya diskon dari uang sejumlah Rp 15.000.000 selama 8 bulan pada tingkat bunga 12% p.a?

3. Karina meminjam Rp 500.000 selama 6 bulan dari Brutus yang memberikan tingkat diskon 9%. Berapakah besarnya yang dikenakan dan beberapa jumlah yang diterima Karina?
4. Melanjutkan soal no. 3 diatas, apabila Karina ingin menerima tepat Rp 500.000,- berapa jumlah yang harus ia ajukan?
5. Hitunglah nilai sekarang uang sejumlah Rp 60.000.000 yang jatuh tempo 1 tahun lagi dengan tingkat bunga 12%.
6. Berapakah tingkat bunga efektif dari termin kredit 2/10. n/30 untuk pembayaran tunai lebih cepat?
7. Jika diketahui tingkat diskon sebuah bank adalah 12%, berapakah tingkat bunga yang ekuivalen untuk periode 6 bulan?
8. Jika diketahui tingkat bunga sebuah bank adalah 12%, berapakah tingkat diskon yang ekuivalen untuk periode 3 bulan?
9. Pak Abdullah berjanji akan membayar pinjamannya dengan menerbitkan sebuah wesel berbunga 19% berjangka waktu 60 hari senilai Rp 20.000.000. dalam 30 hari sebelum jatuh tempo, wesel tersebut didiskontokan kepada bank yang mengenakan tingkat diskon 21%. Hitunglah berapa hasil penjualan tersebut.
10. Berapa tingkat bunga yang membuat bunga sebesar Rp 12.000.000,-, 8 bulan lagi empunyai nilai sekarang Rp 11.320.754,72?

BAB 3
BARISAN DAN DERET

1. Barisan Aritmatika (Barisan Hitung)

Barisan adalah bilangan yang disusun dan dibentuk menurut suatu urutan tertentu. Setiap unsur yang tersusun dalam barisan biasa disebut suku. Ciri dari barisan aritmatika adalah perubahan antar suku sukunya mempunyai selisih atau perbedaan yang sama.

Jika suatu pertama barisan atritmatika U_1 dinamakan a dan bedanya b maka diperoleh:

$U_1 = a$

Beda (b) $= U_2 - U_1 \leftrightarrow U_2 = U_1 + \text{b} = a + b$

Beda (b) $= U_3 - U_2 \leftrightarrow U_3 = U_2 + \text{b} = (a + b) + b = a + 2b$

Beda (b) $= U_4 - U_3 \leftrightarrow U_4 = U_3 + \text{b} = (a + 2\,b + b) = a + 3b$ dan seterusnya.

Berdasarkan suku ke-n barisan aritmatika dengan melihat pola di atas, maka rumus umum suku ke – n dalam barisan aritmatika yaitu,

$$\mathbf{U_n = a + (n - 1)\,b}$$

Keterangan :

U_n	= suku ke – n
a	= suku pertama
b	= beda atau selisih
n	= banyaknya suku

Contoh :

1. Hitung empat suku berikutnya dari barisan aritmatika 1,5,9,13,……

   Jawab :

   Diketahui $U_1 = 1$, $U_2 = 5$ maka b = $U_2 - U_1 = 5 - 1 = 4$

Jadi empat suku berikutnya adalah,

$U_5 = 13 + 4 = 17$

$U_6 = 17 + 4 = 21$

$U_7 = 21 + 4 = 25$

$U_8 = 25 + 4 = 29$

2. Jika suatu barisan aritmatika $U_5 = 42$ dan $U_{10} = 82$, maka $U_{50} = \ldots..$

Jawab :

$U_n = a + (n - 1)\ b$

$U_{10} = a + (10 - 1)\ b = a + 9b = 82$

$U_5\ = a + (5 - 1)\ b \quad = \underline{a + 4b\ = 42\ \ -}$

$5b = 40$

$b = 8$

$U_{10} = a + 9\ (8) = 82 \leftrightarrow a = 82 - 72 = 10$

karena a = 10 dan b = 8 maka,

$U_{50} = a + (50 - 1)\ b = a + 49b = 10 + 49(8) = 402$

2. Deret Aritmatika (Deret Hitung / S_n)

Deret aritmatika ialah penjumlahan dari suku-suku suatu barisan aritmatika. Rumus umum dari deret aritmatika adalah,

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}\ (a +\ U_n)}$$

atau

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}\,(2a + (n-1)b)}$$

Keterangan :

S_n = Suku ke n

a = Suku pertama

b = Beda atau selisih

n = Banyaknya suku

Contoh :

1. Hitung jumlah 10 suku pertama dari barisan aritmatika 1,5,9,13,……

   Jawab :

   a = 1 ; b = 4 ; n = 10

   U_{10} = a + (10 – 1)b = 1 + 9(4) = 37

   Jadi $S_{10} = \frac{10}{2}\,(1 + 37) = 5\,(38) = 190$

2. Hitung jumlah 60 suku dalam barisan aritmatika, jika diketahui suku pertamanya 9 dan suku terakhirnya 127.

   Jawab :

   n = 60 ; a = 9 ; U_{60} = 127

   Cara 1

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a + U_n)$$

$$S_{60} = \frac{60}{2}\,(9 + 127) = 30\,(136) = 4080$$

Cara 2

$U_{60} = a + 59(b) = 9 + 59(b) = 127 \leftrightarrow b = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)b\right)$$

$$S_{60} = \frac{60}{2}\left(2.9 + (60-1)2\right) = 30\,(18 + 118) = 4080$$

3. Barisan Geometri (Barisan Ukur)

Barisan geometri ialah barisan yang perbandingan atau rasio antar dua suku yang berurutan selalu konstan. Perbandingan setiap suku berurutannyan biasa disebut rasio (r).

Contoh : 2, 4, 8, 16, 32, ...

$a_1 = 2 = a$

$a_2 = 4 = 2 \times 2 = a \times r = ar$

$a_3 = 8 = 4 \times 2 = ar \times r = ar^2$

$a_4 = 16 = 8 \times 2 = ar^2 \times r = ar^3$

$a_5 = 32 = 16 \times 2 = ar^3 \times r = ar^4$

$a_n = ar^{n-1}$

jadi rumus dari barisan geometri adalah,

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

Keterangan :

a_n = suku ke- n

a = suku pertama

r = rasio antar suku berurutan

n = banyaknya suku

Contoh :

1. Jika barisan geometri suku pertamanya 16 dan rasionya 2, maka suku ke-8 nya adalah ……….

   Jawab :

   $a_1 = 16$; $r = 2$

   $a_n = ar^{n-1} \leftrightarrow a_8 = 16\ (2)^{8-1} = 16\ (127) = 2032$

2. Suku ke 4 dari suatu barisan geometri adalah 24 dan suku ke 9 nya adalah 768. Carilah suku ke 11 dari barisan geometri tersebut !

   Jawab :

   $a_4 = 24$; $a_9 = 768$; $a_{11} = ?$

   $a_4 = ar^3 = 24 \leftrightarrow a = \frac{24}{r^3}$

   $a_9 = ar^8 = 768 \leftrightarrow \left(\frac{24}{r^3}\right) r^8 = 768$

   $$24r^5 = 7$$

   $$68\ r^5 = \frac{768}{24} = 32$$

   $$r = \sqrt[5]{32} = 2$$

   $a_4 = ar^3 = 24 \leftrightarrow a = \frac{24}{2^3} = 3$

   karena a = 3 dan r = 2, maka $a_{11} = ar^{10} = 3\ (2)^{10} = 1024$

4. Deret Geometri (Deret Ukur / S_n)

Deret geometri ialah penjumlahan dari suku-suku suatu barisan geometri.

Jika $Sn = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$

$r\,Sn = \underline{\quad ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n -}$

$S_n - r\,S_n = a - ar^n$

$(1-r)S_n = a\,(1-r^n)$

maka rumus dari deret geometri adalah,

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}}\text{, jika } r < 1$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a\,(r^n-1)}{(1-r)}}\text{, jika } r > 1$$

Keterangan :

S_n = jumlah suku ke n

a = suku pertama

r = rasio

n = banyaknya suku

Contoh :

1. Hitunglah jumlah 8 suku pertama dari barisan geometri 3, 6,12, 24, ... !

   Jawab :

   a = 3 ; r = 2

$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{(1-r)} \leftrightarrow S_8 = \frac{3\,(1 - 2^8)}{(1-2)} = \frac{3\,(1-256)}{-1} = 765$$

2. Jika suatu deret geometri mempunyai a_3 = 125 dan a_6 = 15.625. Hitunglah besarnya suku pertama dan rasionya !

Jawab :

$a_3 = 125$; $a_6 = 15.625$; a = ? ; r = ?

$a_3 = ar^2 = 125 \leftrightarrow a = \frac{125}{r^2}$

$a_6 = ar^5 = 15.625 \leftrightarrow \left(\frac{125}{r^2}\right) r^5 = 15.625$

$$125r^3 = 15.625 \leftrightarrow r^3 = \frac{15.625}{125} = 125$$

$$r = \sqrt[3]{125} = 5$$

$a_3 = ar^2 = a\,(5)^2 = 125 \leftrightarrow a = \frac{125}{25} = 5$

3. Hitunglah nilai *n* agar jumlah deret geometri 2,4,8,16,… adalah 510 !

   Jawab :

   a = 2 ; r = 2 ; $S_n = 510$; n = ?

$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{(1 - r)} = \frac{2\,(1 - 2^n)}{1 - 2} = 510$$

$$S_n = 2\,(1 - 2^n) = -510$$

$$(1 - 2^n) = -255$$

$$2^n = 256\,, n = 8$$

5. Deret Geometri Tak Hingga

Jika banyaknya suku-suku deret geometri tak hingga, maka disebut deret geometri tak hingga atau $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots.$

Jumlah n suku pertama dari deret geometri ditentukan dengan cara,

$$\begin{aligned}
S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \\
\underline{rS_n} &\underline{= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^n} \; - \\
S_n - rS_n &= a(1-r) + a(r-r^2) + a(r-r^3) + a(r-r^4) + \ldots + a(r^{n-1}-r^n) \\
&= a[(1-r) + (r-r^2) + (r^2-r^3) + (r^3-r^4) + \ldots + (r^{n-i}-r^n)] \\
&= a(1 - r + r - r^2 + r^2 - r^3 + r^3 - r^4 + \ldots + r^{n-i}-r^n) \\
&= a\,(1 - r^n) \\
S_n\,(1-r) &= a\,(1-r^n)
\end{aligned}$$

Jadi $\boldsymbol{Sn = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}}$

Jika $n \to \infty\ maka\ S_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r}$$

Ada dua kemungkinan yang dapat terjadi yaitu,

1. Jika $|r| > 1 \leftrightarrow r < -1\ dan\ r > 1\ maka,$

   $$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - (-\infty) = \infty$$

   Disebut deret divergen (tidak mempunyai limit jumlah)

2. Jika $|r| < 1 \leftrightarrow -1 < r < 1\ dan\ \lim\limits_{\to\infty} = r^n = 0$

   $$maka\ S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - (0)\frac{a}{1-r}$$

$$\boldsymbol{S_\infty = \frac{a}{1-r}}$$

Disebut deret konvergen (mempunyai limit jumlah). Jadi deret geometri tak hingga akan mempunyai jumlah jika -1< r < 1.

Contoh :

1. Hitunglah jumlah deret geometri tak hingga dari

   $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots$

   Jawab :

   $a = 1 \leftrightarrow r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$, memenuhi syarat -1< r < 1

   Jadi $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-2/3} = \frac{1}{1/3} = 3$

2. Hitunglah jumlah deret geometri tak hingga dari

   2 + 4 + 8 + 16 + ...

   Jawab :

   $a = 2 \leftrightarrow r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$ tidak memenuhi syarat -1< r < 1, jadi deret geometri tersebut tidak mempunyai limit jumlah.

6. Aplikasi dalam Ilmu Ekonomi

6.1. Barisan dan Deret Aritmatika

Sering diterapkan dalam masalah perkembangan dan pertumbuhan suatu usaha misalnya perkembangan produksi, pendapatan, dan biaya.

Dianggap sebagai deret aritmatika berarti variabel dalam kasus-kasusnya bertambah atau berkurang secara konstan di setiap periodenya.

Contoh :

1. Persediaan laptop di toko Calosa pada bulan ke-1 adalah 10, jika rata-rata permintaan barang setiap bulan sebanyak 15. Berapa buah laptopkah yang harus disediakan toko Calosa pada bulan ke-6?

   Jawab :

   Diketahui :

   a=10 ; b = 15 ; n = 6

   Ditanya :

   U_6 = ?

   $$U_n = a + (n-1)b$$
   $$= 10 + (6 - 1)15$$
   $$= 85$$

   Jadi laptop yang harus disediakan toko Calosa pada bulan ke-6 sebanyak 85 buah.

2. Pada tahun ke-4 penerimaan PT. ABC sebesar Rp. 6.400.000,-, dan pada tahun ke-6 penerimaan meningkat menjadi 8.500.000,-. Hitunglah :
   a. Perkembangan penerimaan setiap tahunnya.
   b. Penerimaan pada tahun ke-1.
   c. Besar penerimaan pada tahun ke-8.

   Jawab :

   Diketahui :

$U_4 = 6.400.000$; $U_6 = 8.500.000$

Ditanya : (a) $b = ?$; (b) $a = ?$ (c) $U_8 = ?$

(a) $U_n = a + (n - 1)\,b$

$U_6 = a + (6 - 1)\,b = a + 5b = 8.500.000$

$U_4 = a + (4 - 1)\,b = \underline{a + 3b = 6.400.000\ \ -}$

$2b = 2.100.000$

$b = 1.050.000$

Jadi perkembangan perusahaan PT. ABC setiap tahunnya rata-rata sebesar Rp. 1.050.000,-

(b) Telah diketahui bahwa,

$U_6 = a + (6 - 1)\,b = a + 5b = 8.500.000$ maka,

$U_6 = a + 5(1.050.000) = 8.500.000$

$a = 8.500.000 - 5.250.000$

$a = 3.250.000$

Jadi penerimaan perusahaan PT.ABC pada tahun ke-1 adalah sebesar Rp. 3.250.000,-

(c) $U_8 = a+(8-1)b= 3.250.000 + 7(1.050.000) = 10.600.000$

Jadi penerimaan perusahaan PT. ABC pada tahun ke-8 adalah sebesar Rp. 10.600.000,-

3. Perusahaan konveksi TOP memproduksi 750 buah baju pada bulan pertama produksinya, setelah membeli mesin baru dan menambah pegawai produksi meningkat sebanyak 250 buah setiap bulannya. Apabila diasumsikan perkembangan yang dialami konveksi TOP konstan, berapakah jumlah produksi baju pada bulan ke-6?

Jawab :

Diketahui :

a = 750 ; b = 250 ; n = 6

Ditanya :

U_6 = ?

$$U_6 = a + (n - 1)\, b$$
$$U_6 = 750 + (6 - 1)\, 250$$
$$U_6 = 750 + (5)\, 250$$
$$U_6 = 750 + 1250$$
$$U_6 = 2000$$

Jadi jumlah produksi baju perusahaan konveksi TOP pada bulan ke-6 adalah sebanyak 2000 buah baju.

6.2. Barisan dan Deret Geometri

Sering diterapkan dalam masalah perkembangan dan pertumbuhan suatu negara baik itu pertumbuhan penduduk maupun perbankan. Dianggap sebagai deret geometri berarti perbandingan atau rasio variabel dalam kasus-kasusnya bertambah atau berkurang secara konstan di setiap periodenya. Dalam analisa tingkat pertumbuhan penduduk rasio pertumbuhannya adalah (100% + r) atau (1+r), sehingga rumus suku ke-n menjadi

$$\mathbf{a_n = a(1+r)^{n-1},}$$

Contoh :

Pada tahun 2010 jumlah penduduk kota Bandung sebanyak 4.000.000 jiwa, berapa prediksi jumlah penduduk kota Bandung pada tahun 2020 apabila tingkat pertumbuhan penduduk sebesar 2% per tahun?

Jawab :

Diketahui :

$a = 4.000.000$; $r = 0{,}02$; $n = 10$

Ditanya :

$a_{10} = ?$

$a_n = a(1+r)^{n-1}$

$a_{10} = 4.000.000(1 + 0{,}02)^{10-1}$

$= 4.000.000(1{,}02)^9$

$= 4.780.370$

Prediksi jumlah penduduk kota Bandung pada tahun 2020 adalah sebanyak 4.780.370 jiwa.

Deret geometri digunakan juga dalam menghitung masalah bunga dalam kasus simpan pinjam, dan kasus investasi yang dikaitkan dengan suku bunga tetap dengan jangka waktu tertentu. Sebagai ilustrasi jika modal sebesar P_0 akan diinvestasikan dengan bunga per tahun selama n tahun, dengan tingkat suku bunga sebesar r% per tahun. Modal awal pada tahun ke-n yaitu,

$$\boldsymbol{P_n = P_0(1 + i)^n}$$

Jika bunga dibayarkan beberapa periode dalam satu tahun maka rumusnya menjadi,

$$\boldsymbol{P_n = P_0\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mn}}$$

Keterangan :

P_n = Modal pada tahun ke-n (di masa yang akan datang)

P_0 = Modal saat sekarang, saat t = 0

i = Tingkat suku bungan per-tahun

n = tahun ke

m = periode per-tahun

Contoh :

Ibu Aida bermaksud mendepositokan uangnya di bank sebanyak Rp. 20.000.000,- dalam jangka waktu 5 tahun, dengan besar suku bunga 11% per tahun. Berapa jumlah uang yang akan diterima ibu Aida pada akhir tahun ke-5?

Jawab :

$P_n = P_0 (1 + r)^n$

$= 20.000.000 (1 + 0,11)^5$

$= 20.000.000 (1,11)^5$

$= 20.000.000 (1,685)$

$= 33.700.000$

Masalah simpan pinjam cara perhitungannya menggunakan model deret untuk bunga majemuk (bunga berbunga), transaksi dengan model tersebut biasa kita kenal dengan istilah kredit. Rumus kredit untuk bunga yang dibayarkan setahun sekali adalah,

$$\boldsymbol{F_n = P + (1 + i)^n}$$

Sedangkan apabila bunga yang dibayarkan lebih dari satu kali dalam setahun rumusnya adalah,

$$\boldsymbol{F_n = P + \left[1 + \left(\frac{1}{m}\right)^{mn}\right]}$$

Keterangan :

Fn = jumlah nilai kredit selama n periode

i = suku bunga kredit

P = jumlah awal pinjaman

n = banyaknya tahun

m = frekuensi pembayaran bunga dalam setahun

Latihan soal dan jawaban

1. Hitung suku ke-8 dan jumlah 8 suku pertama dari deret hitung berikut,
   a. 13,23,33,…
   b. 155,150,145,…

   Jawab :

   a. Diketahui : a = 13 ; b = 10 ; n = 8

      Ditanya : S_8 dan J_8

      $S_n = a + (n-1)b$

      $S_8 = 13 + (8-1)10$

$S_8 = 83$

$J_n = \frac{n}{2}(a + S_n) = \frac{8}{2}(13 + 83) = 384$

Jadi $J_8 = 384$

b. Diketahui : $a = 155$; $b = -5$; $n = 8$

   Ditanya : S_8 dan J_8

   $S_n = a + (n-1)b$

   $S_8 = 155 + (8-1)(-5)$

   $S_8 = 120$

   $J_n = \frac{n}{2}(a + S_n) = \frac{8}{2}(155 + 120) = 1100$

   Jadi $J_8 = 1100$

2. Sebuah deret hitung suku pertama 250 dan pembeda antar suku 20, hitunglah suku ke 11 dan jumlah 11 suku pertama !

   Jawab :

   Diketahui : $a = 250$; $b = 20$; $n = 11$

   Ditanya : S_{11} dan J_{11}

   $S_n = a + (n-1)b$

   $S_{11} = 250 + (11-1)(20)$

   $S_{11} = 450$

   $J_n = \frac{n}{2}(a + S_n) = \frac{11}{2}(250 + 450) = 3850$

   Jadi $J_{11} = 3850$

3. Deret hitung mempunyai suku pertama 100, suku ke 7 sebesar 160 hitunglah,
   a. Pembeda
   b. Nilai suku ke 21
   c. Jumlah 21 suku pertama

   Jawab :

   Diketahui : a = 100 ; S_7 = 160

   Ditanya : b, S_{21} dan J_{21}

   a. $S_n = a + (n-1)\, b$

   $S_7 = 160 = 100 + (7-1)b$

   $160 = 100 + 6b$

   $b = 10$

   b. $S_{21} = 100 + (20)(10) = 300$

   c. $J_n = \frac{n}{2}(a + S_n) = \frac{21}{2}(100 + 300) = 4200$

4. Deret hitung X mempunyai nilai a=360 dan b= -20. Sedangkan deret hitung Y mempunyai nilai a=90 dan b=10.
   a. Pada suku keberapa ke dua deret mempunyai nilai sama?
   b. Berapa besarnya nilai tersebut?

   Jawab :

   a. Diketahui : $X = Y \begin{cases} X \rightarrow a = 360 \ ; b = -20 \\ Y \rightarrow a = 90 \ ; b = 10 \end{cases}$

   Ditanya : n

$360 + (n-1)(-20) = 90 + (n-1)10$

$380 – 20n = 80 + 10n$

$-30n = -300$

$n = 10$

b. Besar nilai X dan Y untuk suku ke 10 adalah

$S_{10} = 360 + 9(-20) = 180$

5. Perusahaan konveksi memproduksi kemeja sebanyak 600 potong selama Februari. Meskipun permintaan terus meningkat rata-rata 60 potong per bulan, tetapi bagian produksi memutuskan menambah produksi 40 potong saja per bulannya sesuai kapasitas produksinya. Harga jual kemeja Rp. 150.000,- per potong, harga produksi
Rp. 100.000,- per potong.
   a. Berapa jumlah produksi pada bulan Desember?
   b. Berapa jumlah produksi hingga bulan Desember?
   c. Berapa laba perusahaan pada bulan Desember?
   d. Berapa laba perusahaan hingga bulan Desember?

Jawab :

Diketahui : a = 600 ; b = 40 ; harga jual Rp. 150.000,- ; harga produksi = Rp. 100.000,-

Ditanya : S_{11}, J_{11}, laba bulan Desember, dan laba hingga bulan Desember

a. $S_{11} = 600 + 10(40) = 1000$

b. $J_n = \frac{n}{2}(a + S_n) = \frac{11}{2}(600 + 1000) = 8800$

c. Laba bulan Desember

S_{11} x 50.000 = 1000 x 50.000 = 50.000.000.

Jadi laba yang diperoleh oleh perusahaan konveksi pada bulan Desember adalah sebesar Rp. 50.000.000,-

d. Laba sampai dengan bulan Desember

J_{11} x 50.000 = 8800 x 50.000 = 440.000.000.

Jadi laba yang diperoleh oleh perusahaan konveksi sampai dengan bulan Desember adalah sebesar Rp. 440.000.000,-

6. Produksi sepatu pada bulan ke 8 sebanyak 2050 pasang, sedangkan pada bulan ke 4 sebanyak 1450 pasang. Perkembangan produksi menurut deret hitung.
   a. Berapa perkembangan produksi per bulan?
   b. Berapa besarnya produksi sepatu pada bulan pertama?
   c. Pada bulan keberapa produksi sepatu mencapai 2800 pasang?
   d. Berapa jumlah produksi sepatu selama 1 tahun?

Jawab :

Diketahui : $S_8 = 2050$; $S_4 = 1450$

a. $S_8 \rightarrow a + 7b = 2050$

$S_4 \rightarrow \underline{a + 3b = 1450} -$

$4b = 600$

$b = 150$,

jadi perkembangan produksi sepatu setiap bulannya sebanyak 150 pasang sepatu.

b. $S_4 \rightarrow a + 3b \quad = 1450$

$a + 3\,(150) = 1450$

$a = 1000$

jadi jumlah produksi sepatu di bulan pertama sebanyak 1000 pasang sepatu.

c. $S_n \rightarrow \quad a + (n\text{-}1)b \quad = 2800$

$1000 + (n\text{-}1)(150) = 2800$

$150n = 1950$

$n = 13$

jadi jumlah produksi akan mencapai 2800 pasang sepatu pada bulan ke 13 produksi.

d. $J_n = \frac{n}{2}(a + S_n) \leftrightarrow J_{12} = \frac{12}{2}(a + S_{12}),$

Harus dicari dahulu nilai S_{12} nya,

$S_{12} = a + 11b$

$S_{12} = 1000 + 11(150)$

$S_{12} = 2650$

$$J_{12} = \frac{12}{2}(1000 + 2650) = 21.900$$

Jadi jumlah produksi selama 12 bulan adalah sebanyak 21.900 pasang sepatu.

7. Hitunglah suku ke 6 dan jumlah 4 suku pertama dari deret ukur berikut,

a. 1,5,25,125,…

b. 800,400,200,100,…

Jawab :

Diketahui :

deret ukur 1,5,25,125,…dan 800,400,200,100,…

Ditanya : S_6 dan J_6

a. a = 1 ; r = 5

$S_n = a.\ r^{n-1} \leftrightarrow S_6 = 1.\ 5^5 = 3125$

$$J_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \leftrightarrow J_6 = \frac{1(1-5^6)}{(1-5)} = 3906$$

b. a = 800 ; r = 0,5

$S_n = a.\ r^{n-1} \leftrightarrow S_6 = 800.\ (0{,}5)^5 = 25$

$$J_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \leftrightarrow J_6 = \frac{800(1-0{,}5^6)}{(1-0{,}5)} = 1575$$

8. Pengganda sebuah deret ukut besarnya 5, suku ke 6 sebesar 6250. Hitunglah suku pertama dan jumlah sampai suku ke 6!

Jawab :

Diketahui : r = 5 ; S_6 = 6250

Ditanya : a dan J_6

$S_n = a.\ r^{n-1} \leftrightarrow 6250 = a.\ (5)^5 \leftrightarrow a = 2$

$$J_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \leftrightarrow J_6 = \frac{2(1-5^6)}{(1-5)} = 7812$$

9. Deret ukur suku ke 3 besarnya 800 dan suku ke 7 besarnya 204.800, hitunglah :
   a. Suku pertama
   b. Pengganda
   c. Suku ke 5
   d. Jumlah hingga suku ke 5

   Jawab :

   Diketahui : $S_3 = 800$; $S_7 = 204.800$

   Ditanya : a, r, S_5 dan J_5

   a. $S_n = ar^{n-1} \leftrightarrow S_3 = ar^2 \leftrightarrow 800 = ar^2 \rightarrow a = \frac{800}{r^2}$

   b. $S_7 = 204.800 = ar^6$

   $$\left(\frac{800}{r^2}\right) r^6 = 204.800$$

   $800r^4 = 204.800$

   $r^4 = \frac{204.800}{800} = 256 \rightarrow r = \sqrt[4]{256} = 4,$

   jika r = 4 maka a = 50

   c. $S_n = ar^{n-1} \rightarrow S_5 = 50(4)^4 = 12.800$

   d. $J_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \leftrightarrow J_5 = \frac{50(1-4^5)}{(1-4)} = 17.050$

BAB 4
PENERAPAN MATRIKS DALAM EKONOMI BISNIS

Matriks adalah sekumpulan bilangan atau simbol yang disusun menurut baris dan kolom hingga berbentuk persegi. Kumpulan bilangan atau simbol yang terdapat pada suatu matriks biasa disebut dengan **elemen matriks**. Bentuk matriks biasanya menggunakan huruf kapital A,B,C,D, dst, sedangkan elemen matriks biasanya ditulis dengan menggunakan huruf kecil misalnya notasi a_{ij} yang ditafsirkan sebagai elemen matriks a pada baris ke i dan kolom ke j.

Matriks biasanya dinotasikan sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks A diatas menyatakan bahwa matriks A terdiri dari m baris dan n kolom. Ukuran m baris dan n kolom biasa ditulis m x n dan disebut sebagai **ordo matriks**, secara singkat matriks diatas dapat ditulis $A_{m \times n}$.

Contoh :

1. Matriks 2 baris 2 kolom

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ elemen matriks baris ke 1 kolom ke 2 adalah 6, sedangkan elemen matriks baris ke 2 kolom ke 1 adalah 1.

2. Matriks 2 baris 3 kolom

$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ elemen matriks baris ke 1 kolom ke 2 adalah 4, sedangkan elemen matriks baris ke 2 kolom ke 3 adalah 5

3. Matriks 3 baris 3 kolom

$C = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ elemen matriks baris ke 2 kolom ke 2 adalah 7, sedangkan elemen matriks baris ke 3 kolom ke 3 adalah 12

Matriks merupakan materi yang penting untuk dipelajari di ilmu eksak dan sosial, karena melalui matriks berbagai permasalahan matematika dapat ditemukan solusinya misalnya persamaan linier dengan 2 variabel atau lebih.

1. Operasi Dasar Matriks

1.1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Matriks hanya dapat dijumlahkan dan dikurangkan, apabila kedua matriks mempunyai **ukuran (ordo) yang sama**, sedangkan elemen matriks yang dijumlahkan dan dikurangkan adalah elemen matriks yang memiliki letak yang sama.

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}}$$

Sifat-sifat Penjumlahan Matriks

Apabila matriks A, B, dan C mempunyai ordo yang sama, maka matriks-matriks tersebut mempunyai sifat,

a. A + B = B + A (komutatif)

b. (A+ B) + C = A + (B + C) (asosiatif)

c. Invers penjumlahan A adalah –A jadi
   A + (-A) = (-A) + A = O

d. Unsur identitas penjumlahan yaitu matriks O, jadi
   O + A = A + O = A

Contoh :

Carilah hasil penjumlahan dan pengurangan dari matriks di bawah ini,

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}, dan\ D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

1. A + B
2. A – B
3. C + D
4. A – C

Jawab :

1. $A + B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \\ 13 & 12 \end{vmatrix}$

2. $A - B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

3. $C + D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 17 \end{vmatrix}$

4. A – C tidak dapat dikurangkan, karena matriks A dan C mempunyai ordo yang berbeda.

1.2. Perkalian Skalar dengan Matriks

Jika A adalah matriks ordo mxn dan k suatu skalar, maka matriks B = kA dapat dihitung dengan cara mengalikan semua elemen yang ada pada matriks A dengan bilangan k.

$$B = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \\ ke & kf \end{vmatrix}$$

Contoh :

Jika diketahui $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $dan\ B = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ hitunglah,

1. 2A
2. 2A + 3B

Jawab :

1. $2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

2. $2A + 3B = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \ 3\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15 & 3 & 9 \\ 18 & 9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 11 & 11 \\ 22 & 17 & 15 \end{vmatrix}$$

Sifat-sifat Perkalian Skalar dengan Matriks

Semua jenis matriks dapat dikalikan dengan perkalian skalar sehingga berlaku sifat-sifat sebagai berikut,

1. $k_1(A + B) = k_1A + \ k_1B$

2. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2$A

3. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

1.3. Perkalian Matriks

Perkalian pada matriks A dan B dapat dilakukan apabila jumlah kolom pada matriks A sama dengan jumlah baris pada matriks B. Misalkan matriks A_{mxn} dan matriks B_{nxp} maka hasil A x B = C_{mxp}. Mencari nilai C_{mxp} dilakukan dengan cara mengalikan tiap baris matriks A dengan tiap kolom matriks B, kemudian hasilnya dijumlahkan dan disimpan pada kolom yang sama.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$$A\ x\ B = \begin{bmatrix} a.e + b.g & a.f + b.h \\ c.e + d.g & c.f + d.h \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Perkalian Matriks

Apabila k adalah bilangan real (skalar), matriks A, B, dan C adalah matriks-matriks yang dapat dikalikan, serta matriks B dan C dapat dijumlahkan, maka akan berlaku sifat-sifat perkalian matriks sebagai berikut,

1. $(A\ x\ B) x\ C = A\ x\ (B\ x\ C)$ (asosiatif)

2. A x B ≠ B x A (tidak komutatif)

3. $A\ x\ (B + C) = (A\ x\ B) + (A\ x\ C)$ (distributif)

4. A x O = O x A = O

5. (kA) x B = k (A x B)

6. $A^n = A\ x\ A\ x\ A\ x\ A\ x\ \dots\dots x\ A\ (sebanyak\ n\ faktor)$

2. Matriks-matriks Khusus

a. Matriks Baris

yaitu matriks yang terdiri dari satu baris, misalnya $Y = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

b. Matriks Kolom

yaitu matriks yang terdiri dari satu kolom, misalnya $S = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

c. Matriks Persegi

yaitu matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolom, misalnya

$J = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ adalah matriks 2 baris dan 2 kolom atau J_{2x2}. Bilangan yang terletak pada baris ke- 1 kolom ke-1 dan baris ke- 2 kolom ke-2 disebut **elemen-elemen diagonal utama**. Pada matriks J disamping, elemen-elemen diagonal utamanya adalah 1 dan 7.

$K = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \\ 9 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks 3 baris dan 3 kolom atau K_{3x3}.

Pada matriks K disamping, elemen-elemen diagonal utamanya adalah 0, 1, dan 0.

d. Matriks Identitas

yaitu matriks persegi dimana semua elemen diagonal utamanya adalah 1 (satu) dan elemen lainnya adalah 0 (nol). Matriks identitas sering ditulis dengan notasi "I".

Contoh :

$$I_3 = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right], \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Matriks Transpose (A^T)

yaitu matriks yang mengalami pertukaran elemen, dari baris menjadi kolom dan dari kolom menjadi baris. Akibat dari pertukaran tersebut maka ordo dari matriks akan berubah, misalkan matriks A dengan ordo 3x4 setelah mengalami transpose akan berubah menjadi matriks dengan ordo 4x3.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ matriks transposenya adalah $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

4. Kesamaan Dua Matriks

Dua buah matriks dikatakan sama apabila mempunyai ordo yang sama, dengan semua elemen yang seletak mempunyai nilai yang sama.

Contoh :

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ dan $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, maka $\mathrm{A} = \mathrm{B}$

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & (2+1) \\ (2+2) & 6 \end{bmatrix}$, dan $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2^2 & (2\mathrm{x}3) \end{bmatrix}$ dapat dikatakan bahwa A = B = C

5. Determinan Suatu Matriks

Determinan suatu matriks dapat dicari dengan beberapa cara, tergantung dari jumlah ordo yang dimiliki oleh matriks tersebut.

5.1. Determinan Matriks Ordo 2x2

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka determinan dari matriks tersebut adalah

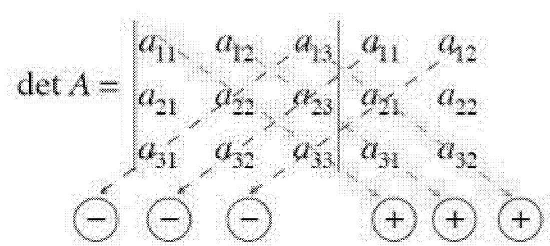
$$|\mathbf{A}| = (\mathbf{a.d} - \mathbf{b.c}).$$

5.2. ***Determinan Matriks Ordo 3x3***

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, untuk menghitung determinannya dapat dilakukan dengan 2 metode yaitu metode Sarrus dan metode Minor-Kofaktor.

Metode Sarrus

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ubah bentuk matriks menjadi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$. Selanjutnya lakukan perhitungan dengan cara



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Jadi dengan menggunakan metode Sarrus matriks dengan ordo 3x3 mempunyai nilai $|\mathbf{A}| = (\mathbf{a_{11}a_{22}a_{33}} + \mathbf{a_{12}a_{23}a_{31}} + \mathbf{a_{13}a_{21}a_{32}}) - (\mathbf{a_{13}a_{22}a_{31}} + \mathbf{a_{11}a_{23}a_{32}} + \mathbf{a_{12}a_{21}a_{33}})$

Metode Minor-Kofaktor

Sebelum kita melakukan perhitungan determinan terlebih dahulu kita harus menentukan matriks minor dari setiap elemen, dengan cara menghilangkan setiap elemen-elemen baris ke-i dan kolom ke-j, sehingga diperoleh minor dari elemen i dan j yang biasa ditulis M_{ij}.

Matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ mempunyai 6 minor yaitu,

$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$, $M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $M_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$, $M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

$M_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, $M_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$, $M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Setelah minor semua elemen diperoleh, langkah selanjutnya adalah menghitung nilai kofaktornya dengan menggunakan rumus

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Sehingga diperoleh nilai kofaktor setiap elemen sebagai berikut,

$K_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$K_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$K_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$K_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$K_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$K_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Kofaktor dari matriks A berordo 3x3 adalah kof (A) = $\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$

Nilai determinan dari matriks A berordo 3x3 dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan hasil-hasil perkalian elemen-elemen suatu baris atau kolom dengan kofaktornya.

Jadi $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13}}$

Metode Ekspansi Baris dan Kolom

Misal diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka untuk mencari nilai determinannya adalah sebagai berikut,

$$\boldsymbol{|A| = a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}}$$

Contoh :

Jika diketahui matriks $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 9 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, carilah nilai determinannya dengan menggunakan metode Sarrus dan metode Ekspansi !

5.3. Sifat-sifat Determinan Matriks

1. Determinan matriks akan bernilai 0 (nol) apabila terjadi 3 hal yaitu,

- Jika semua elemen dari salah satu baris atau kolom bernilai **0 (nol)**

  Contoh :

  $$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 0$$

  $$B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ -5 & 6 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 0$$

- Jika semua elemen dari salah satu baris atau kolom **sama dengan** elemen pada baris atau kolom lainnya

Contoh :

$B = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-8} & \mathbf{7} \\ -5 & 6 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{-8} & \mathbf{7} \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 0$, elemen-elemen pada baris ke-1 sama dengan elemen-elemen pada baris ke-3

- Jika semua elemen dari salah satu baris atau kolom merupakan **kelipatan** dari elemen pada baris atau kolom lainnya

  Contoh :

  $B = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-8} & \mathbf{7} \\ -5 & 6 & 2 \\ \mathbf{6} & \mathbf{-16} & \mathbf{14} \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 0$, elemen-elemen pada baris ke-3 merupakan kelipatan dari elemen-elemen pada baris ke-1

2. $|A^T| = |A|$, $\mathrm{A^T}$adalah transpose dari matriks A

3. $|AB| = |A| x |B|$

4. $|kA| = kn|A|$, berlaku untuk matriks $A_{n\,x\,n}$ (matriks persegi) dengan k suatu konstanta.

5. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, $\mathrm{A^{-1}}$adalah inverse dari matriks A

6. Invers Matriks

6.1. Pengertian invers matriks :

Jika kita mempunyai 2 buah matriks yaitu $|A_{n\,x\,n}|\ dan\ |B_{n\,x\,n}|$, maka $|\boldsymbol{A_{n\,x\,n}}|\boldsymbol{x}\ |\boldsymbol{B_{n\,x\,n}}| = |\boldsymbol{I_{n\,x\,n}}|$ dimana I_n adalah matriks identitas. Kondisi demikian dapat dikatakan bahwa matriks A dan B saling invers.

Jika matriks mempunyai invers maka matriks adalah **matriks nonsingular**, sebaliknya jika matriks tidak mempunyai invers maka matriks adalah **matriks singular (nilai determinannya = 0).** Notasi dari invers matriks A adalah $|\boldsymbol{A^{-1}}|$.

6.2. Mencari Invers Matriks berordo 2x2

Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan ad – bc ≠ 0 maka inversnya adalah,

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}}$$

Contoh :

Matriks Nonsingular

Tentukan invers matriks-matriks di bawah ini,

$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

$$Jawab:\ |A^{-1}| = \frac{1}{3.8 - 7.4}\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 7/4 \\ 1 & -3/4 \end{vmatrix}$$

$B = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 14 & 4 \end{bmatrix}$

$$Jawab: \ |A^{-1}| = \frac{1}{8.4 - 2.14} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -14 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -14 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ -14/4 & 2 \end{vmatrix}$$

Matriks Singular

Tentukan nilai "x" dari matriks di bawah ini, apabila diketahui matriksnya adalah matriks singular !

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 10x \\ -2x & 40 \end{bmatrix}$$

Jawab :

Matriks singular adalah matriks yang mempunyai determinan = 0.

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 10x \\ -2x & 40 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-8.40) - \ (-20x^2) = 0$$

$$-320 = \ -20x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{-320}{-20}} = \sqrt{16} \ = 4$$

6.3. Mencari Invers Matriks berordo 3x3

Pada pembahasan kali ini invers matriks berordo 3x3 akan dicari dengan cara **adjoin**. Notasi dari adjoin A adalah **adj (A)**. Adjoin merupakan bentuk transpose dari kofaktor elemen-elemen matriks A atau biasa ditulis sebagai berikut,

$$\mathbf{adj(A) = (kof|\boldsymbol{A}|)^T}$$

setelah adjoin diperoleh langkah selanjutnya adalah mencari invers matriks dengan menggunakan rumus,

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{adj}\ (\boldsymbol{A})$$

Contoh :

Jika diketahui matriks A = $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, tentukan inversnya !

Jawab :

Langkah 1 : Menentukan determinan matriks A

$|A| = 2\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$= 2(4) - 4(8) + 2(4) = 8 – 32 + 8 = -16

Langkah 2 : Menentukan kofaktor

$$\mathrm{K}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = (-1^2)(36 - 32) = 4$$

$$\mathrm{K}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = (-1^3)(24 - 16) = -8$$

$$\mathrm{K}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (-1^4)(16 - 12) = 4$$

$$\mathrm{K}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = (-1^3)(24 - 8) = -16$$

$$\mathrm{K}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = (-1^2)(12 - 4) = 8$$

$K_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (-1^5)(8-8) = 0$

$K_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = (-1^4)(32-12) = 20$

$K_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = (-1^5)(16-8) = -8$

$K_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = (-1^6)(12-16) = -4$

Diperoleh nilai kofaktor $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -16 & 8 & 0 \\ 20 & -8 & -4 \end{vmatrix}$

Langkah 3 : Menentukan adjoint dengan rumus adj(A) = (kof$|A|$)^T

$$\text{Adj (A)} = \begin{vmatrix} 4 & -16 & 20 \\ -8 & 8 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Langkah 4 : Menentukan invers matriks dengan rumus $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ (A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{vmatrix} 4 & -16 & 20 \\ -8 & 8 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/3 & 8/3 & -10/3 \\ 4/3 & -4/3 & -4/3 \\ -2/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}$$

6.4. Sifat-sifat Invers Matriks

1. $\boldsymbol{A.A^{-1} = A^{-1}.A = I}$

2. $(\boldsymbol{A^{-1}})^{-1} = \boldsymbol{A}$

3. $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B^{-1}A^{-1}}$

4. $\boldsymbol{AI = IA = A}$

7. Persamaan Matriks AX=B dan XA=B

- Jika diketahui matriks AX = B, maka

  $\leftrightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$

  $\leftrightarrow (A^{-1}.A)X = A^{-1}.B$

  $\leftrightarrow (I)X = A^{-1}.B$

  $\leftrightarrow \boldsymbol{X = A^{-1}.B}$

- Jika diketahui matriks XA = B, maka

  $\leftrightarrow (XA)A^{-1} = B.A^{-1}$

  $\leftrightarrow X(AA^{-1}) = B.A^{-1}$

  $\leftrightarrow X(I) = B.A^{-1}$

  $\leftrightarrow \boldsymbol{X = B.A^{-1}}$

8. Penggunaan Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Seperti sudah kita ketahui bahwa untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan cara eliminasi dan substitusi. Adakalanya penyelesaian dengan menggunakan 2 (dua) cara tersebut dirasa terlalu panjang, sehingga kita harus mencoba cara yang lebih singkat misalnya dengan menggunakan matriks.

8.1. SPL Dua Variabel

Persamaan umum dari persamaan linier dua variabel adalah sebagai berikut,

ax + by = p .... (1)

cx + dy = q .... (2)

kedua persamaan diatas dapat disusun ke dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

bentuk dari persamaan di atas sama dengan persamaan AX = B, dimana matriks

$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $X = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$, dan $B = \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix}$, oleh karena itu persamaan diatas dapat dicari nilai X dan Y nya dengan menggunakan rumus,

A.X = B

$\leftrightarrow \boldsymbol{X = A^{-1}.B}$

$\leftrightarrow \boldsymbol{X = \frac{1}{ad-bc} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix}}$ **(dengan syarat ad-bc ≠ 0)**

Contoh :

Buatlah penyelesaian SPL dua variabel di bawah ini dengan cara matriks,

4X + 2Y = 8

2X + 6Y = 14

Jawab:

1. Persamaan dapat disusun dalam bentuk matriks menjadi

$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 14 \end{vmatrix}$, dari sini dapat diketahui matriks

$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$, $X = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$, dan $B = \begin{vmatrix} 8 \\ 14 \end{vmatrix}$. Sehingga nilai X dan Y

dapat dicari dengan menggunakan rumus,

$$X = \frac{1}{ad-bc} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4.6 - 2.2} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 8 \\ 14 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{1}{20} . \begin{vmatrix} 20 \\ 40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Jadi nilai X = 1 dan Y = 2.

8.2. SPL Tiga Variabel

Persamaan umum dari persamaan linier tiga variabel adalah sebagai berikut,

$a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1$ …………………. (1)

$a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2$ ………………….. (2)

$a_3X + b_3Y + c_3Z = d_3$ ....(3)

ketiga persamaan diatas dapat disusun ke dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}$$

bentuk dari persamaan di atas sama dengan persamaan AX = B, dimana matriks

$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $X = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$, dan $B = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}$, oleh karena itu

persamaan diatas dapat dicari nilai X ,Y, dan Z nya dengan menggunakan rumus $X = A^{-1} B$. Telah kita pelajari bahwa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ (A)$$

Jadi,

A.X = B

$\leftrightarrow \boldsymbol{X = A^{-1}.B = \frac{1}{|A|} adj\ (A). \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}}$ **(dengan syarat $|A| \neq 0$)**

Contoh :

Buatlah penyelesaian SPL tiga variabel di bawah ini dengan cara matriks,

4X + 2Y – 2Z = 2

2X + 2Y + 2Z = 12

2X – 4Y + 2Z = 0

Jawab :

Persamaan dapat disusun dalam bentuk matriks menjadi

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{vmatrix}$, dari sini dapat diketahui matriks

$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, $X = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$, dan $B = \begin{vmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{vmatrix}$. Sehingga nilai X ,

Y, dan Z dapat dicari dengan menggunakan rumus,

$X = A^{-1}.B = \frac{1}{|A|} adj\ (A). \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}$dengan menggunakan minor-kofaktor

diperoleh nilai determinan,

$$|A| = 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \ (-2) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 4(12) - 2(0) + \ (-2)(-12) = 72|A| = 72$$

Nilai kofaktornya adalah,

$$\text{K}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = (-1^2)(4 + 8) = 12$$

$$\text{K}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (-1^3)(4 - 4) = 0$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix} = (-1^{4})(-8-4) = -12$$

$$K_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -4 & 2\end{bmatrix} = (-1^{3})(4-8) = 4$$

$$K_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix} = (-1^{2})(8+\ 4) = 12$$

$$K_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix} = (-1^{5})(-16-4) = 20$$

$$K_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix} = (-1^{4})(4+4) = 8$$

$$K_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix} = (-1^{5})(8+4) = -12$$

$$K_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix} = (-1^{6})(8-4) = 4$$

Diperoleh nilai kofaktor $\begin{vmatrix}12 & 0 & -12\\ 4 & 12 & 20\\ 8 & -12 & 4\end{vmatrix}$

Dicari nilai adj(A) = (kof$|A|$)^{T}

$$\text{Adj (A)} = \begin{vmatrix}12 & 4 & 8\\ 0 & 12 & -12\\ -12 & 20 & 4\end{vmatrix}$$

$$X = A^{-1}.B = \frac{1}{|A|} adj\ (A). \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{1}{72}. \begin{vmatrix} 12 & 4 & 8 \\ 0 & 12 & -12 \\ -12 & 20 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{1}{72}. \begin{vmatrix} 72 \\ 144 \\ 216 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Jadi nilai X = 1, Y = 2, dan Z = 3. Himpunan penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $\{(1), (2), (3)\}$

8.3. Penyelesaian SPL dengan cara Determinan

Selain dengan cara matriks seperti yang telah dijelaskan di atas, system persamaan linier dapat juga diselesaikan dengan cara determinan.

- SPL Dua Variabel

  Persamaan umum dari persamaan linier dua variabel adalah sebagai berikut,

  ax + by = p .... (1)

  cx + dy = q .... (2)

  kedua persamaan diatas dapat disusun ke dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

bentuk dari persamaan di atas sama dengan persamaan AX = B, dimana matriks

$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $X = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$, dan $B = \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix}$, oleh karena itu

persamaan diatas dapat dicari nilai X dan Y nya dengan langkah-langkah sebagai berikut,

1. Mencari determinan X dan Y berdasarkan elemen-elemen pada matriks A, dengan menggunakan rumus,

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. Mencari Dx dengan cara mengganti kolom ke-1 dengan elemen-elemen matriks B sehingga menjadi,

$$\boldsymbol{D_x} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{q} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{pd - bq}$$

3. Mencari Dy dengan cara mengganti kolom ke-2 dengan elemen-elemen matriks B sehingga menjadi,

$$\boldsymbol{D_y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{q} \end{vmatrix} = \boldsymbol{aq - pc}$$

4. Menentukan nilai X dan Y dengan menggunakan rumus,

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{D_x}}{\boldsymbol{D}} \quad dan \quad \boldsymbol{Y} = \frac{\boldsymbol{D_y}}{\boldsymbol{D}}$$

Contoh :

Buatlah penyelesaian SPL dua variabel di bawah ini dengan cara matriks,

4X + 2Y = 8

2X + 6Y = 14

Jawab :

Buat persamaan menjadi bentuk matriks $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 14 \end{vmatrix}$

Langkah 1:

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20$

Langkah 2 :

$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 14 & 6 \end{vmatrix} = 48 - 28 = 20$

Langkah 3 :

$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 56 - 16 = 40$

Langkah 4 :

$X = \dfrac{20}{20} = 1\ dan\ \ Y = \dfrac{40}{20} = 2$

Jadi nilai X = 1 dan Y = 2. Himpunan penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $\{(1), (2)\}$.

- **SPL Tiga Variabel**

  Persamaan umum dari persamaan linier tiga variabel adalah sebagai berikut,

  $a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1$ …………………. (1)

  $a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2$ ………………….. (2)

  $a_3X + b_3Y + c_3Z = d_3$ ....(3)

  ketiga persamaan diatas dapat disusun ke dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}$$

  bentuk dari persamaan di atas sama dengan persamaan AX = B, dimana matriks

$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $X = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$, dan $B = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}$, oleh karena itu persamaan diatas dapat dicari nilai X ,Y, dan Z nyadengan langkah-langkah sebagai berikut,

1. Mencari determinan X, Y, dan Z berdasarkan elemen-elemen pada matriks A, dengan menggunakan rumus,

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{bmatrix} - \boldsymbol{b_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{c_3} \end{bmatrix} + \boldsymbol{c_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} \end{bmatrix}$$

2. Mencari Dx dengan cara mengganti kolom ke-1 dengan elemen-elemen matriks B sehingga menjadi,

$$\boldsymbol{D_x} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{d_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{d_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{d_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{d_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{bmatrix} - \boldsymbol{b_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{d_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{d_3} & \boldsymbol{c_3} \end{bmatrix} + \boldsymbol{c_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{d_2} & \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{d_3} & \boldsymbol{b_3} \end{bmatrix}$$

3. Mencari Dy dengan cara mengganti kolom ke-2 dengan elemen-elemen matriks B sehingga menjadi,

$$\boldsymbol{D_y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{d_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{d_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{d_3} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{d_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{d_3} & \boldsymbol{c_3} \end{bmatrix} - \boldsymbol{d_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{c_3} \end{bmatrix} + \boldsymbol{c_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{d_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{d_3} \end{bmatrix}$$

4. Mencari Dz dengan cara mengganti kolom ke-3 dengan elemen-elemen matriks B sehingga menjadi,

$$\boldsymbol{D_z} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{d_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{d_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{d_3} \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{a_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{d_2} \\ \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{d_3} \end{bmatrix} - \boldsymbol{b_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{d_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{d_3} \end{bmatrix} + \boldsymbol{d_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} \end{bmatrix}$$

5. Menentukan nilai X , Y , dan Z dengan menggunakan rumus,

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{D_x}}{\boldsymbol{D}} \quad ; \quad \boldsymbol{Y} = \frac{\boldsymbol{D_y}}{\boldsymbol{D}} \; ; \quad \boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{D_z}}{\boldsymbol{D}}$$

Buatlah penyelesaian SPL tiga variabel di bawah ini dengan cara matriks,

4X + 2Y – 2Z = 2

2X + 2Y + 2Z = 12

2X – 4Y + 2Z = 0

Jawab :

1. Persamaan dapat disusun dalam bentuk matriks menjadi

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{vmatrix}$, dari sini dapat diketahui matriks

$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, $X = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$, dan $B = \begin{vmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{vmatrix}$. Sehingga nilai

determinan X , Y, dan Z dapat dicari dengan menggunakan,

Langkah 1 :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} - b_1 \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 4(12) - 2(0) + (-2)(-12) = 72|A| = 72$$

Langkah 2 :

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} - b_1 \begin{bmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 12 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D_x = 2(12) - 2(24) - 2\,(-48) = 24 - 48 + 96 = 72$$

Langkah 3 :

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{bmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{bmatrix} - d_1\begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_y = 4(24) - 2(0) - 2\,(-24) = 96 + 48 = 144$$

Langkah 4 :

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{bmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{bmatrix} - b_1\begin{bmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{bmatrix} + d_1\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 12 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D_z = 4(48) - 2(-24) + 2\,(-12) = 192 + 48 - 24 = 216$$

Langkah 5 :

$$X = \frac{D_x}{D} = \frac{72}{72} = 1$$

$$Y = \frac{D_y}{D} = \frac{144}{72} = 2$$

$$Z = \frac{D_z}{D} = \frac{216}{72} = 3$$

Jadi nilai X = 1, Y = 2, dan Z = 3. Himpunan penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $\{(1), (2), (3)\}$.

BAB 5

PENERAPAN FUNGSI LINIER DALAM EKONOMI BISNIS

Bentuk fungsi dalam matematika dapat digunakan untuk mencari hubungan sebab akibat antara berbagai variabel ekonomi misalnya hubungan antara investasi dan tingkat bunga. Dari berbagai macam hubungan fungsional yang ada dalam matematika, hubungan linier merupakan bentuk yang paling sering digunakan dalam analisis ekonomi.

1. Persamaan Linier

Persamaan linier dapat dibentuk dengan berbagai macam cara (tergantung dari data yang tersedia), du Mairy (2003, 79) membaginya menjadi empat cara yaitu :

a. Cara dwi koordinat

b. Cara koordinat lereng

c. Cara penggal lereng

d. Cara dwi penggal

1.1. Cara Dwi Koordinat

Persamaan linier dibentuk dari dua buah titik, misalnya diketahui titik A (x_1,y_1) dan titik $B(x_2,y_2)$ maka rumus untuk mencari persamaan liniernya adalah,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh : Jika diketahui titik A berkoordinat (4,6) dan titik B berkoordinat (12,10) maka persamaan liniernya adalah,

$$\frac{y - 6}{10 - 6} = \frac{x - 4}{12 - 4}$$

$$\frac{y - 6}{4} = \frac{x - 4}{8}$$

$$8y - 48 = 4x - 16$$

$$8y = 4x + 32$$

$$y = 0{,}5\ x + 4$$

1.2. Cara Koordinat Lereng

Dari sebuah titik dan suatu kemiringan dapat dibentuk persamaan linier yang memenuhi titik dan kemiringan tersebut, misalnya diketahui titik A (x_1,y_1) dan kemiringan garisnya "b" maka rumus persamaan liniernya adalah,

$$\mathbf{y - y_1 = b\ (x - x_1)}$$

Contoh : Diketahui titik A(4,6) dengan kemiringan garis 1, maka persamaan liniernya adalah :

$$y - 6 = 1\ (x - 4)$$

$$y = x + 2$$

1.3. Cara Penggal Lereng

Data yang diperlukan untuk mencari persamaan linier dengan cara penggal adalah penggal pada salah satu sumbu dan kemiringan garis yang memenuhi persamaan. Rumus yang digunakan adalah :

$$\mathbf{y = a + bx}$$

Ket : a = penggal : b = kemiringan

Contoh : Jika diketahui penggal dan kemiringan garis y = f(x) adalah 4 dan 2, maka persamaan liniernya adalah y = 4 + 2x.

1.4. Cara Dwi Penggal

Persamaan linier dapat juga dibentuk dengan mengetahui penggal garis tersebut pada masing-masing sumbu. Sumbu vertikal ketika x = 0 dan sumbu horizontal ketika y = 0. Jika dimisalkan dari sebuah garis lurus penggal pada sumbu vertikal adalah a dan penggal pada sumbu horisontal adalah c, maka persamaan liniernya adalah :

$$\boldsymbol{y = a - \frac{a}{c}\,x}$$

Contoh : Jika penggal sebuah garis lurus pada sumbu vertikal adalah 2 dan sumbu horisontal adalah -4, maka persamaan liniernya adalah :

$$y = 2 - \frac{2}{(-4)}\,x$$

$$y = 2 + 0{,}5\,x$$

Lereng sebuah garis lurus adalah hasil bagi selisih antara dua ordinat (y_2 – y_1) terhadap selisih antara dua absis (x_2 – x_1). Rumus persamaan liniernya adalah sbb,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Rumus hubungan linier menurut cara koordinat lereng adalah,

$$\mathbf{y - y_1 = b(x - x_1)}$$

dimana rumus untuk mencari nilai "b" adalah sbb,

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Hubungan Dua Buah Garis Lurus

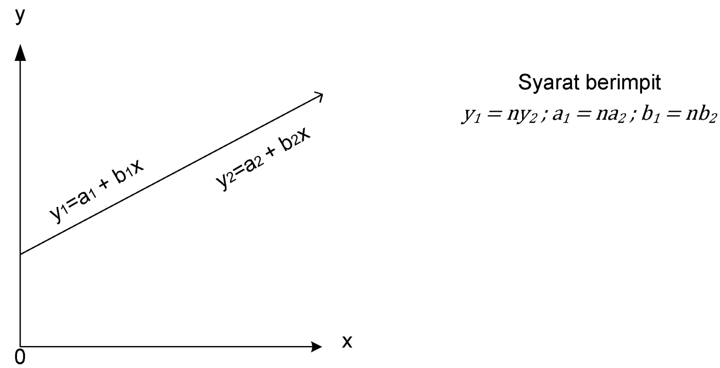
Dua buah garis lurus akan mempunyai empat macam kemungkinan bentuk hubungan yaitu,

2.1. Garis saling berimpit
2.2. Garis saling sejajar
2.3. Garis saling berpotongan
2.4. Garis saling berpotongan tegak lurus

2.1. Dua Buah Garis Saling Berimpit

Dua buah garis akan saling berimpit apabila persamaan garis yang satu merupakan kelipatan dari persamaan garis yang lain. Artinya persamaan garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan berimpit dengan persamaan garis $y_2 = a_2 + b_2x$ apabila $y_1 = ny_2$; $a_1 = na_2$; $b_1 = nb_2$

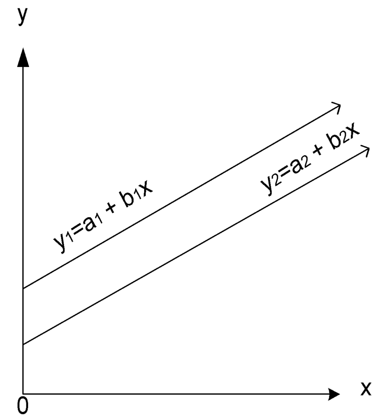
Gambar :



2.2. Dua Buah Garis Saling Sejajar

Dua buah garis akan saling sejajar apabila lereng garis yang satu sama dengan lereng garis yang lain. Artinya persamaan garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan sejajar dengan persamaan garis $y_2 = a_2 + b_2x$ apabila $a_1 \neq a_2$ dan $b_1 = b_2$

Gambar :

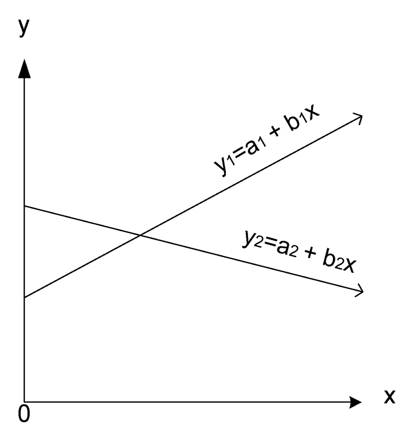


Syarat sejajar
$a_1 \neq a_2$ dan $b_1 = b_2$

2.3. Dua Buah Garis Saling Berpotongan

Dua buah garis akan saling berpotongan apabila lereng garis yang satu tidak sama dengan lereng garis yang lain. Artinya persamaan garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan berimpit dengan persamaan garis $y_2 = a_2 + b_2x$ apabila $b_1 \neq b_2$.

Gambar :

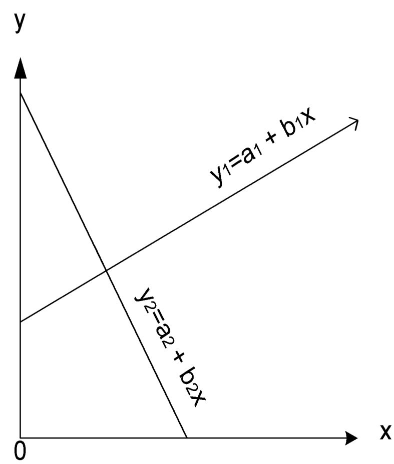


Syarat berpotongan
$b_1 \neq b_2$

2.4. Dua Buah Garis Saling Tegak Lurus

Dua buah garis akan saling tegak lurus apabila lereng garis yang satu kebalikan dari lereng garis yang lain dengan tanda yang berlawanan. Artinya persamaan garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan tegak lurus dengan persamaan garis $y_2 = a_2 + b_2x$ apabila $b_1 = -1/b_2$ atau $b_1 \cdot b_2 = -1$.

Gambar :



Syarat tegak lurus
b1 = -1/b2 atau
b1 . b2 = -1

Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Bentuklah persamaan linier yang garisnya melalui pasangan titik-titik berikut,

   (a) (-1,4) dan (1,0)

   (b) (-1,-2) dan (-5,-2)

   (c) (0,0) dan (1,5)

   (d) (1,4) dan (2,3)

2. Bentuklah persamaan linier yang garisnya melalui titik (-1,3) dan mempunyai koefisien arah atau lereng sebesar,

(a) -1

(b) 2

(c) 5

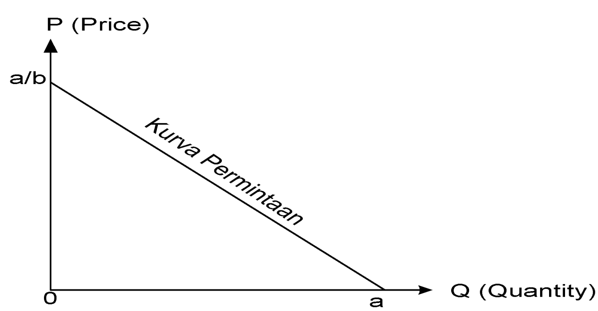
(d) 0

3. Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran Dan Titik Keseimbangan Pasar

3.1. Fungsi Permintaan

Fungsi permintaan menghubungkan antara variabel harga (P) dan variabel jumlah (Q) yang diminta. Bentuk umum dan kurva dari fungsi permintaan adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{Q = a - bP} \qquad \text{atau} \qquad \mathbf{P = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q}$$



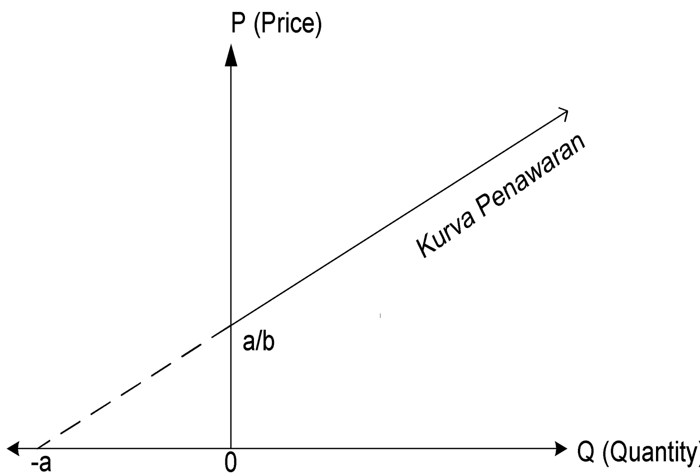
Melihat bentuk persamaan dan kurva di atas terlihat bahwa variabel P dan Q mempunyai tanda yang berlawanan. ***Hal ini sesuai dengan hukum permintaan yang menyatakan bahwa apabila harga naik maka jumlah yang diminta (dipesan) akan berkurang, begitu pula***

sebaliknya apabila harga turun maka jumlah yang diminta akan bertambah.

3.2. Fungsi Penawaran

Fungsi penawaran menghubungkan antara variabel harga dan variabel jumlah yang ditawarkan. Bentuk umum dan kurva dari fungsi permintaan adalah sebagai berikut,

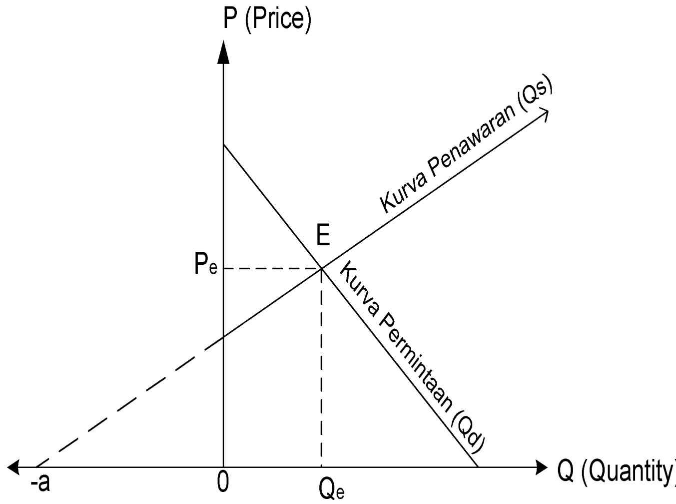
$$\mathbf{Q = - a + bP} \qquad \text{atau} \qquad \mathbf{P = \frac{a}{b} + \frac{1}{b}Q}$$



3.3. Keseimbangan Pasar (Equilibrium)

Keseimbangan pasar tercapai apabila jumlah barang yang diminta sama dengan jumlah barang yang ditawarkan di pasaran. Secara matematik persamaan dan kurva keseimbangan pasar adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{Q_d = Q_s}$$



Keterangan :

Q_d : jumlah permintaan

Q_s : jumlah penawaran

E : titik keseimbangan

P_e : harga keseimbangan

Q_e : jumlah keseimbangan

Contoh 1 :

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 15 – Q$, sedangkan fungsi penawarannya $P = 3 + 0,5\ Q$. Berapa harga dan jumlah barang agar keseimbangan pasar dapat tercipta ? Tunjukkan keseimbangan pasar yang diperoleh dalam bentuk kurva!

Jawab :

Permintaan : $P = 15 – Q \longrightarrow Q = 15 – P$

Penawaran : $P = 3 + 0,5\ Q \longrightarrow Q = -6 + 2P$

Keseimbangan pasar dapat tercipta apabila $Q_d = Q_s$

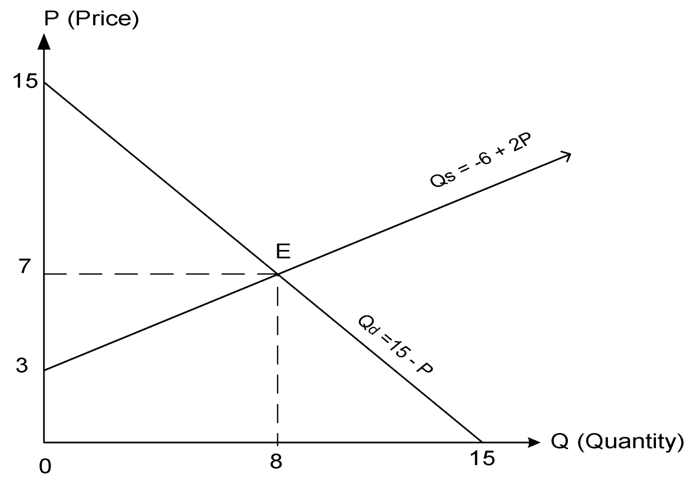
$$15 - P = -6 + 2P$$

$$-3P = -21$$

$$P = 7$$

$$Q = 15 - P = 15 - 7 = 8$$

Jadi keseimbangan pasar akan tercipta apabila $P_e = 7$ dan $Q_e = 8$



Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Fungsi permintaan dan penawaran dari suatu barang ditunjukkan oleh persamaan berikut,

$$Q_d = 6 - 0{,}75\ P$$

$$Q_s = -5 + 2\ P$$

   a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pasar ?

   b. Tunjukkan keseimbangan pasar tersebut dalam bentuk grafik !

2. Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh Pd = 6 – 2 Q dan fungsi penawarannya adalah Ps = 12 + Q.
   a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pasar ?
   b. Tunjukkan keseimbangan pasar tersebut dalam bentuk grafik !

4. Pajak Spesifik, Proporsional, Subsidi, Dan Keseimbangan Pasar Kasus Dua Macam Barang

4.1. Pajak Spesifik

Pengaruh pajak yang dikenakan atas penjualan suatu barang menyebabkan harga jual barang menjadi naik. Hal tersebut terjadi karena produsen akan mengalihkan sebagian pajak kepada konsumen, yaitu dengan cara menawarkan harga jual yang lebih tinggi. Akibat pengenaan pajak menyebabkan harga keseimbangan pasar menjadi lebih tinggi bila dibandingkan dengan harga keseimbangan pasar sebelum dikenai pajak.

Pengenaan pajak sebesar "t" atas setiap unit barang yang dijual menyebabkan kurva penawaran bergeser ke atas. Jika sebelum pajak persamaan penawaran P = a + bQ maka sesudah ada pajak menjadi P = (a + t) + bQ.

Contoh 2 :

Apabila soal pada contoh 1 dikenakan pajak sebesar 3 per unit. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pajak sebelum dan sesudah terkena pajak? Tunjukkan pula dalam bentuk kurva !

Jawab :

- ❖ Harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum terkena pajak telah dihitung pada contoh 1, yaitu Pe = 7 dan Qe = 8.
- ❖ Harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah terkena pajak sebesar 3 per unit adalah,

  Penawaran sebelum pajak : $P = 3 + 0,5\ Q$

  Penawaran setelah pajak :

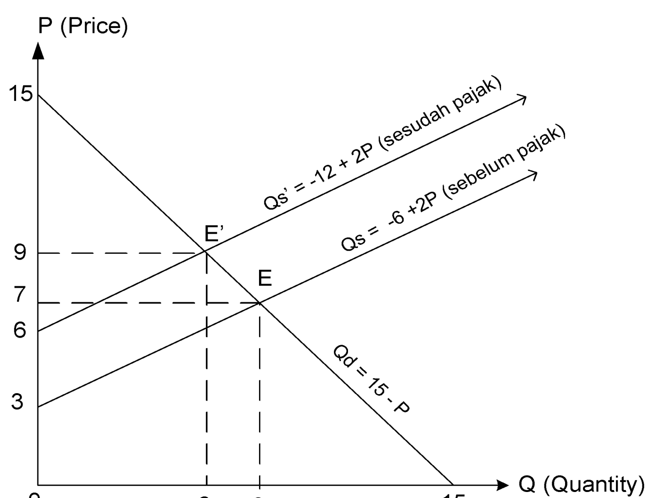
  $$P = 3 + 3 + 0,5\ Q \longrightarrow Q = -12 + 2\ P$$

  Persamaan permintaan : $P = 15 - Q \longrightarrow Q = 15 - P$

  Keseimbangan pasar setelah terkena pajak,

  $$Q_d = Q_s$$
  $$15 - P = -12 + 2P$$
  $$-3P = -27$$
  $$P = 9$$
  $$Q = 15 - P = 15 - 9 = 6$$

Jadi harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah terkena pajak adalah $P_e' = 9$ dan $Q_e' = 6$.



Beban pajak yang ditanggung oleh konsumen (tk) adalah selisih antara harga keseimbangan sesudah pajak dan sebelum pajak atau,

$$\mathbf{tk = P_e' - P_e}$$

Beban pajak yang ditanggung oleh produsen (tp) adalah selisih antara besarnya pajak per unit barang (t) dan besar pajak yang ditanggung oleh konsumen (tk) atau,

$$\mathbf{tp = t - tk}$$

Jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah (T) adalah perkalian antara jumlah barang yang terjual sesudah terkena pajak (Q_e') dengan besarnya pajak per unit barang (t) atau,

$$\mathbf{T = Q_e' \times t}$$

dalam contoh 2 besar pajak yang ditanggung konsumen adalah sebesar tk = 9 – 7 = 2. Artinya dari setiap unit barang yang dibeli, konsumen harus menanggung pajak sebesar 2 per unit sedangkan pajak yang ditanggung produsen 1 per unit. Sedangkan jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah adalah 6 x 3 = 18.

4. 2. Pajak Proporsional

Pajak proporsional ialah pajak yang besarnya ditetapkan berdasarkan persentase tertentu dari harga jual. Meskipun pengaruhnya sama dengan pengaruh pajak spesifik yaitu menaikkan harga keseimbangan dan mengurangi jumlah keseimbangan pasar, namun analisisnya agak berbeda.

Jika persamaan penawaran sebelum pajak P = a + bQ, maka setelah dikenakan pajak proporsional sebesar "t %" persamaan penawaran menjadi,

$$\mathbf{P = \frac{a}{(1-t)} + \frac{b}{(1-t)} Q} \qquad \text{atau}$$

$$\mathbf{Q = -\frac{a}{b} + \frac{(1-t)}{b} P}$$

Contoh 3 :

Apabila soal pada contoh 1 dikenakan pajak oleh pemerintah sebesar 25% dari harga jual. Hitunglah harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak, serta buatlah kurvanya !

Jawab :

- ❖ Harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum terkena pajak telah dihitung pada contoh 1, yaitu Pe = 7 dan Qe = 8.
- ❖ Harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah terkena pajak sebesar t = 25 % = 0,25 adalah,

  Penawaran sebelum pajak : P = 3 + 0,5 Q

  Penawaran setelah pajak : P = 3 + 0,5 Q + 0,25 P

  $P = 4 + \frac{2}{3}Q \longrightarrow Q = -6 + 1{,}5\,P$

  Persamaan permintaan : P = 15 – Q ⟶ Q = 15 –P

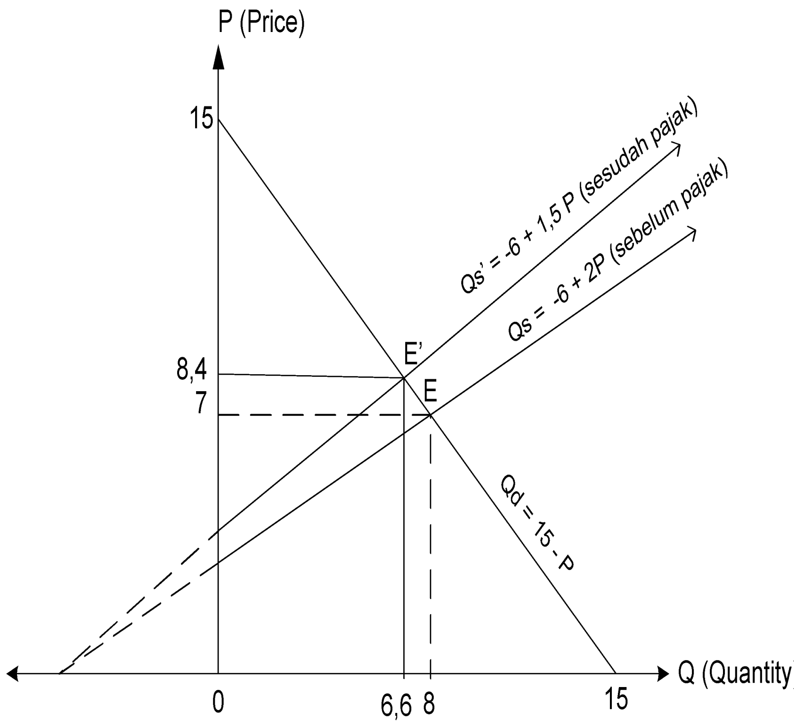
  Keseimbangan pasar setelah terkena pajak,

  $$Q_d = Q_s$$

  $$15 - P = -6 + 1{,}5P$$

$$-2{,}5P = -21$$
$$P = 8{,}4$$
$$Q = 15 - P = 15 - 8{,}4 = 6{,}6$$

Jadi harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah terkena pajak proporsional adalah $P_e' = 8{,}4$ dan $Q_e' = 6{,}6$.



Beban pajak yang ditanggung oleh konsumen (tk) adalah selisih antara harga keseimbangan sesudah pajak dan sebelum pajak atau,

$$\mathbf{tk = P_e' - P_e}$$

Beban pajak yang ditanggung oleh produsen (tp) adalah selisih antara besarnya pajak per unit barang (t) dan besar pajak yang ditanggung oleh konsumen (tk) atau,

$$tp = t - tk$$

Jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah (T) adalah perkalian antara jumlah barang yang terjual sesudah terkena pajak (Q_e') dengan besarnya pajak per unit barang (t) atau,

$$T = Q_e' \times t$$

Besar pajak yang diterima oleh pemerintah dari setiap unit barang adalah

$$t \times Pe'$$

dalam contoh 3 diperoleh hasil sebagai berikut,

1. Besar pajak yang diterima oleh pemerintah dari setiap unit barang adalah 0,25x8,4=2,1

2. Besar pajak yang ditanggung konsumen adalah sebesar tk = 8,4 – 7 = 1,4. Artinya dari setiap unit barang yang dibeli, konsumen harus menanggung pajak sebesar 1,4 per unit.

3. Besar pajak yang ditanggung produsen tp = 2,1 – 1,4 = 0,7 per unit.

4. Jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah adalah
   6,6 x 2,1 = 13,86.

4.3. Subsidi

Subsidi sering dikatakan sebagai pajak negatif karena merupakan kebalikan dari pajak, pengaruh subsidi terhadap keseimbangan pasar merupakan kebalikan dari pajak oleh karena itu cara menganalisisnya sama dengan menganalisis pengaruh pajak. Subsidi dapat bersifat spesifik dapat pula bersifat proporsional.

Pengaruh subsidi menyebabkan harga jual barang menjadi lebih rendah, akibatnya harga keseimbangan pasar menjadi lebih rendah tapi jumlah keseimbangan menjadi lebih banyak. Apabila diberikan subsidi spesifik sebesar “s” maka persamaan penawaran yang semula $P = a + bQ$ setelah memperoleh subsidi menjadi,

$$\mathbf{P' = (a - s) + bQ}$$

Contoh 4 :

Apabila soal pada contoh 1 dikenakan subsidi oleh pemerintah sebesar 1,5 atas setiap unit barang yang diproduksi. Hitunglah harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan setelah subsidi, serta buatlah kurvanya !

Jawab :

- Harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum mendapat subsidi telah dihitung pada contoh 1, yaitu Pe = 7 dan Qe = 8.
- Harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah mendapat subsidi sebesar 1,5 atas setiap unit barang yang diproduksi adalah,

  Penawaran sebelum subsidi : $P = 3 + 0,5\ Q$

  Penawaran setelah subsidi : $P = 3 + 0,5\ Q\ 1,5$

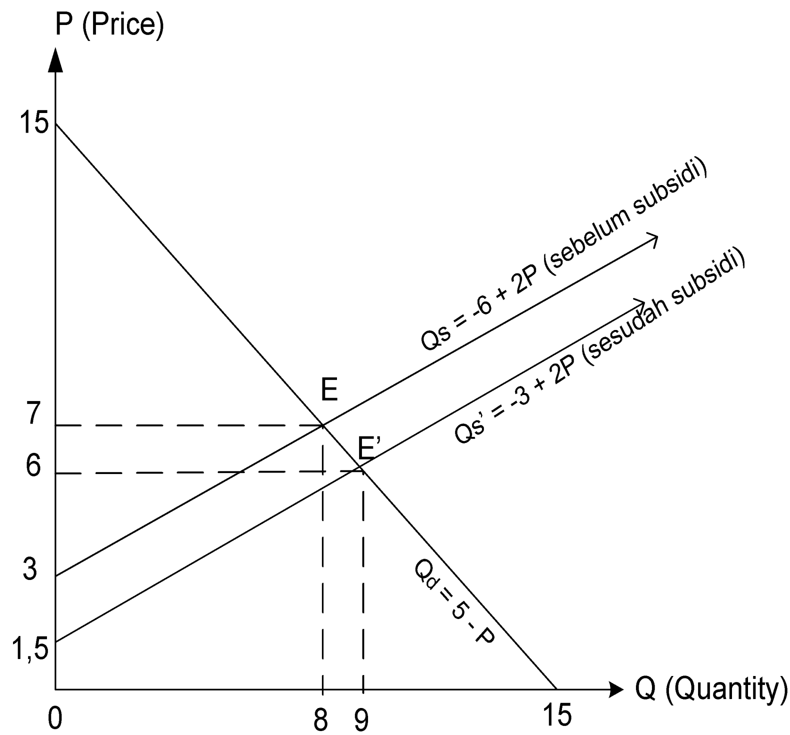
  $P = 1,5 + 0,5Q \longrightarrow Q = -3 + 2P$

  Persamaan permintaan : $P = 15 – Q \longrightarrow Q = 15 – P$

  Keseimbangan pasar setelah mendapat subsidi,

  $$Q_d = Q_s$$
  $$15 – P = -3 + 2P$$
  $$-3P = - 18$$
  $$P = 6$$
  $$Q = 15 – P = 15 – 6 = 9$$

  Jadi harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah mendapat subsidi adalah $P_e' = 6$ dan $Q_e' = 9$.



Subsidi yang diterima secara tidak langsung oleh konsumen (sk) adalah selisih antara harga keseimbangan tanpa subsidi (P_e) dan harga keseimbangan dengan subsidi (P_e') atau,

Sk = Pe – Pe'

Subsidi yang diterima produsen (sp) adalah selisih antara besarnya subsidi per unit barang (s) dan bagian subsidi yang diterima konsumen (sk) atau,

sp = s – sk

Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah (S) adalah perkalian antara jumlah barang yang terjual sesudah subsidi (Q_s') dengan besarnya subsidi per unit barang (s) atau,

$$\mathbf{S = Q_s' \times s}$$

dalam contoh 4 diperoleh hasil sebagai berikut,

1. Besar subsidi yang diterima konsumen adalah sebesar sk = 7 - 6 = 1. Artinya dari setiap unit barang yang dibeli, konsumen menerima sebesar 1 per unit.
2. Besar subsidi yang diterima produsen sp = 1,5 – 1 = 0,5 per unit.
3. Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah adalah S = 9 x 1,5 = 13,5.

4.4. Keseimbangan Pasar Kasus Dua Macam Barang

Persamaan fungsi permintaan yang berbentuk Q = a – bP mencerminkan hubungan fungsional antara jumlah permintaan dan harga dari satu jenis barang. Fungsi tersebut menunjukkan seolah-olah tidak ada faktor lain yang mempengaruhi jumlah permintaan selain faktor harga saja, padahal dalam kehidupan sehari-hari ada barang-barang tertentu yang sifat permintaannya tidak hanya dipengaruhi oleh harga barang itu sendiri, tetapi juga dipengaruhi oleh faktor lain. Barang-barang semacam ini adalah barang-barang yang mempunyai hubungan “substitutif (saling menggantikan)” dan barang yang mempunyai hubungan “komplementer (saling melengkapi).

Jika barang X dan Y mempunyai hubungan penggunaan, permintaan akan masing-masing barang dipengaruhi juga oleh harga barang lainnya maka fungsi permintaan akan masing-masing barang tersebut adalah,

$Q_{dx} = f\ (Px, Py)$ — Q_{dx} : jumlah permintaan barang X

Q_{dy} : jumlah permintaan barang Y

$Q_{dy} = g\ (Py, Px)$ — Px : harga barang X per unit

Py : harga barang Y per unit

karena permintaan akan masing-masing barang merupakan fungsi dari harga dua macam barang, maka keseimbangan pasar yang tercipta adalah keseimbangan pasar untuk kedua macam barang tersebut sehingga analisis dapat dilakukan secara bersamaan.

Contoh 5 :

Permintaan akan barang X ditunjukkan oleh persamaan $Q_{dx} = 10 - 4Px + 2Py$, sedangkan penawarannya $Q_{sx} = -6 + 6Px$. Sedangkan untuk barang Y permintaannya ditunjukkan oleh persamaan $Q_{dy} = 9 - 3Py + 4Px$ dan penawarannya $Q_{sy} = -3 + 7Py$. Hitunglah harga dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar untuk masing-masing barang tersebut !

Jawab :

- Keseimbangan pasar barang X,

$$Qdx = Qsx$$

$$10 - 4Px + 2Py = -6 + 6Px$$

10 Px – 2 Py = 16.. (pers 1)

- ❖ Keseimbangan pasar barang Y,

$$Qdy = Qsy$$

$$9 - 3Py + 4Px = -3 + 7Py$$

4 Px – 10 Py = -12.. (pers 2)

- ❖ Pers (1) dan pers (2)

$$\begin{array}{lcl} 10\ Px - 2\ Py = 16 & \left| \begin{array}{cc} x & 1 \\ x & 2{,}5 \end{array} \right| & 10\ Px - 2\ Py = 16 \\ 4\ Px - 10\ Py = -12 & & 10\ Px - 25Py = -30 \end{array}$$

$$\underline{\hspace{6cm}} \ -$$

$$23\ Py = 46$$

$$Py = 2$$

dengan memasukkan Py = 2 ke salahsatu persamaan diperoleh nilai Px = 2. Nilai Qx dan Qy dapat diperoleh dengan memasukkan nilai Px dan Py kedalam persamaan permintaan atau persamaan penawaran masing-masing barang. Dari hasil perhitungan diperoleh nilai P_x equilibrium = 2, P_y equilibrium = 2, Q_x equilibrium = 6, Q_y equilibrium = 11.

Catatan : Metode ini dapat diterapkan pada kasus-kasus lebih dari dua macam barang.

Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Jika fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan oleh P = 15 – Q dan fungsi penawaran P = 0,5 Q + 3. Terhadap produk tersebut dikenakan pajak oleh pemerintah sebesar Rp. 3,- per unit.
   a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah kena pajak ?
   b. Berapa besar penerimaan pajak total oleh pemerintah ?
   c. Berapa besar pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen ?
   d. Gambarkan harga dan jumlah keseimbangan sebelum dan setelah pajak dalam satu grafik !

2. Fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan oleh P = 15 – Q dan fungsi penawaran P = 0,5Q + 3. Jika pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp. 1,5 per unit produk,
   a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan sebelum dan sesudah subsidi ?
   b. Berapakah besar subsidi yang diberikan oleh pemerintah ?
   c. Berapakah besar subsidi yang diterima oleh konsumen dan produsen ?
   d. Gambarkan dalam satu grafik !

3. Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran dari dua macam produk adalah sebagai berikut,

   $Q_{dx} = 5 – 2Px + Py$; $Q_{dy} = 6 + Px – Py$

   dan

   $Q_{sx} = -5 + 4Px – Py$; $Q_{sy} = -4 – Px + 3Py$

   Carilah harga dan jumlah keseimbangan pasarnya !

5. Fungsi Biaya, Penerimaan, Analisis Bep, Dan Fungsi Anggaran

5.1. Fungsi Biaya

Biaya total *(total cost)* yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan dalam operasi bisnisnya terdiri atas biaya tetap *(fixed cost)*. Sesuai dengan namanya, sifat biaya tetap adalah tidak tergantung pada jumlah barang yang dihasilkan. Berapa unitpun barang yang dihasilkan, jumlah biaya tetap dalam jangka pendek senantiasa tidak berubah. Secara matematik, biaya tetap bukan merupakan fungsi dari jumlah barang dihasilkan tetapi merupakan sebuah konstanta, dan kurvanya berupa sebuah garis lurus sejajar sumbu jumlah. Sebaliknya biaya variabel tergantung pada jumlah barang yang dihasilkan. Semakin banyak jumlah barang yang dihasilkan semakin besar pula biaya variabelnya. Secara matematik biaya variabel merupakan fungsi dari jumlah barang yang dihasilkan, kurvanya berupa sebuah garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik pangkal.

$$\mathbf{FC = k}$$

$$VC = f(Q) = vQ$$

$$C = g(Q) = FC + VC = k + vQ$$

Keterangan :

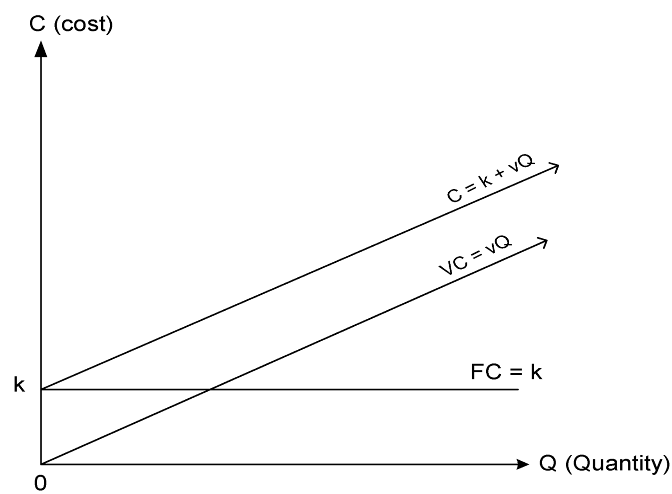
FC : biaya tetap

VC : biaya variabel

C : biaya total

k : konstanta

v : lereng kurva VC dan kurva C



Contoh 6 :

Biaya tetap yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan sebesar Rp. 20.000,- sedangkan biaya variabelnya ditunjukkan oleh persamaan VC = 100Q.

a. Tunjukkan persamaan dan kurva biaya totalnya!

b. Berapa biaya total yang dikeluarkan jika perusahaan tersebut memproduksi 500 unit barang ?

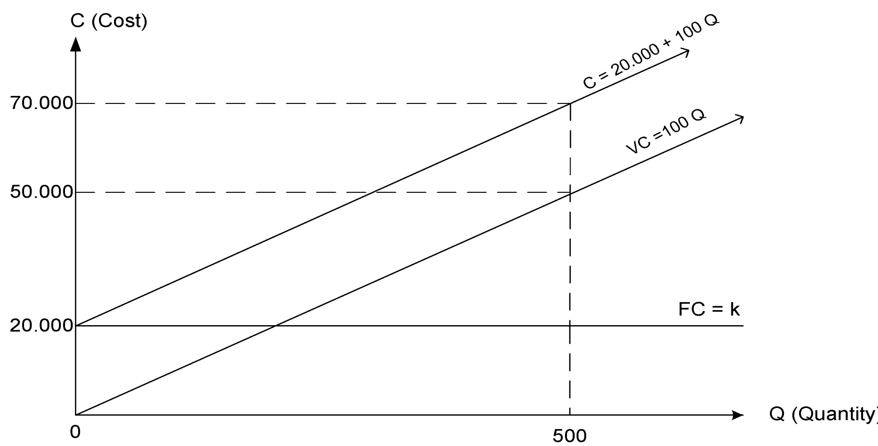
Jawab :

$$\left.\begin{array}{r}FC = 20.000 \\ VC = 100\ Q\end{array}\right\} \ C = FC + VC \longrightarrow \ C = 20.000 + 100$$

Q

Jika Q = 500, maka C = 20.000 + 100 (500) = 70.000

a. Kurva :



b. Jadi perusahaan harus mengeluarkan biaya total sebesar Rp. 70.000,0 untuk memproduksi 500 unit barang.

5.2. Fungsi Penerimaan

Penerimaan sebuah perusahaan dari hasil penjualan barang merupakan fungsi dari jumlah barang yang terjual atau dihasilkan. Semakin banyak barang yang diproduksi dan terjual semakin besar pula penerimaannya. Penerimaan total *(total revenue)* adalah hasil kali jumlah barang yang terjual dengan harga jual per unit barang tersebut. Secara matematik, penerimaan merupakan fungsi jumlah barang kurvanya berupa garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik pangkal.

$$\mathbf{R = Q \times P = f\,(Q)}$$

dalam menganalisis penerimaan selalu dianggap bahwa perusahaan senantiasa berhasil menjual setiap barang yang dihasilkannya, dengan demikian Q dalam R = f (Q) bukan saja melambangkan jumlah barang dihasilkan tetapi juga melambangkan jumlah barang yang terjual.

Contoh 7 :

Harga jual produk yang dihasilkan oleh sebuah perusahaan Rp. 200,- per unit.

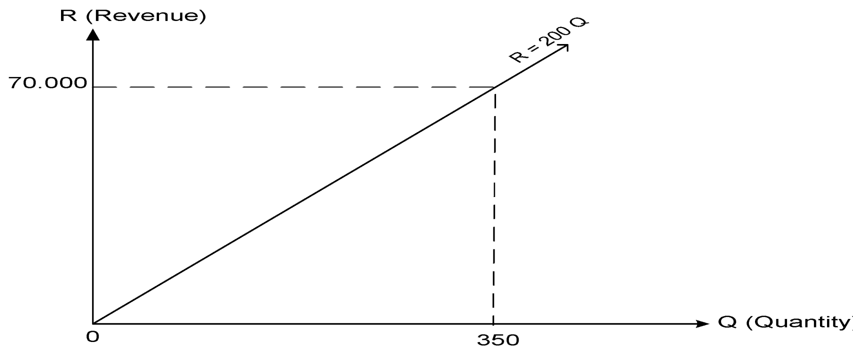
a. Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total perusahaan tersebut !
b. Berapa besar penerimaannya bila terjual barang sebanyak 350 unit ?

Jawab :

$R = Q \times P$

$\quad = Q \times 200 = 200\,Q$

a. Kurva :

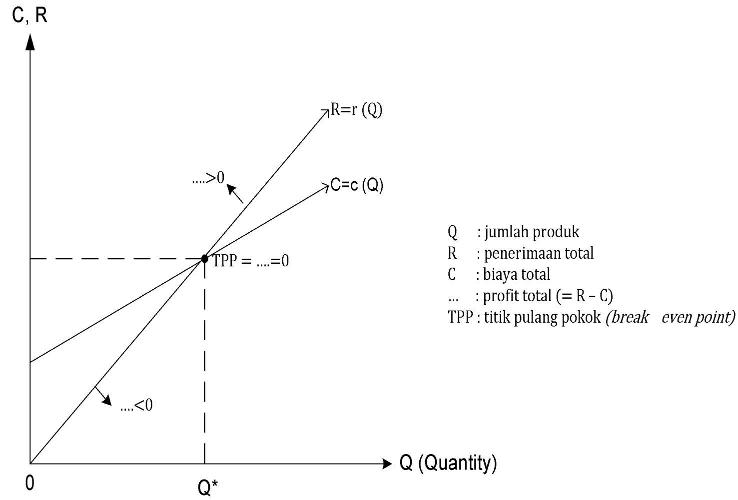


b. Bila Q = 350, maka R = 200 x 350 = 70.000

5.3. Analisis Pulang Pokok *(Break Even Point)*

Penerimaan dan biaya merupakan variabel-variabel penting untuk mengetahui kondisi bisnis suatu perusahaan. Bila diketahui penerimaan total (R) yang diperoleh dari biaya total (C) yang dikeluarkan, maka dapat dianalisis apakah perusahaan mendapat keuntungan atau mengalami kerugian. Keuntungan (profit positif, ….> 0) akan didapat bila R > C, secara grafik hal ini terlihat pada area dimana kurva R terletak di atas kurva C. Sebaliknya kerugian (profit negatif, ….< 0) akan didapat bila R < C, secara grafik hal ini terlihat pada area dimana kurva R terletak di bawah kurva C.

Konsep yang lebih penting berkenaan dengan R dan C adalah konsep "pulang pokok (break even point)" yaitu konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian. Keadaan pulang pokok (profit nol, …..=0) terjadi apabila R = C, artinya perusahaan tidak memperoleh keuntungan tetapi tidak pula merugi. Secara grafik hal ini ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva R dan C.



Q* mencerminkan posisi tingkat produksi/penjualan pulang pokok. Area disebelah kanan Q* merupakan area keuntungan (….>0) sedangkan di sebelah kiri Q* merupakan area kerugian (…. < 0).

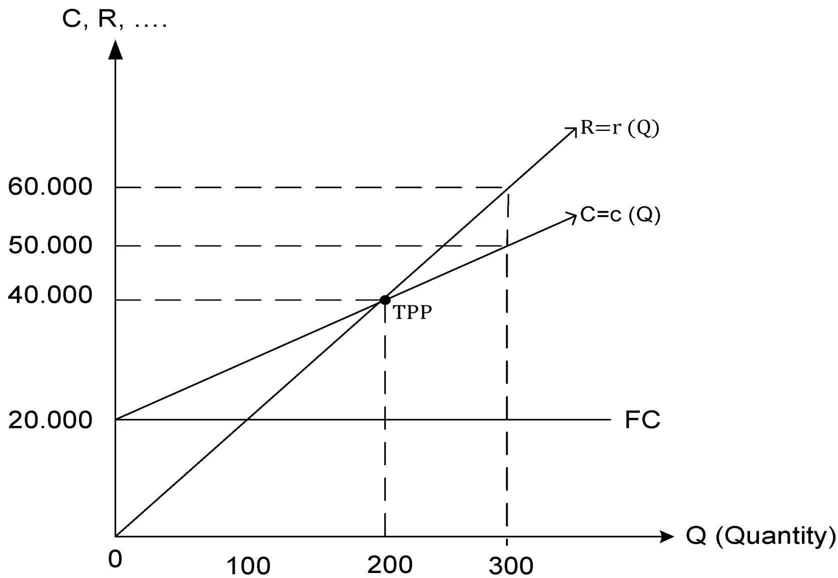
Contoh 8 :

Bila biaya total yang dikeluarkan perusahaan ditunjukkan oleh persamaan C=20.000+100Q dan penerimaan totalnya R = 200Q. Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan ini berada dalam posisi pulang pokok ? Apa yang terjadi jika perusahaan tersebut berproduksi sebanyak 300 unit ?

Jawab :

Kondisi pulang pokok akan terjadi apabila ….=0, dimana nilai …= R – C. Artinya R – C = 0 atau R = C.

$$R = C$$
$$200Q = 20.000 + 100Q$$
$$100Q = 20.000$$
$$Q = 200$$



Jika Q = 300 unit maka,

R = 200 (300) = 60.000;

C = 20.000 + 100(300) = 50.000

…..= R – C = 60.000 – 50.000 = 10.000

Jadi apabila perusahaan memproduksi sebanyak 300 unit maka perusahaan akan memperoleh keuntungan sebesar 10.000. Posisi pulang pokok terjadi pada tingkat produksi 200 unit, R dan C sama-sama sebesar 40.000.

5.4. Fungsi Anggaran

Ekonomi mikro mengenal dua teori yang membahas tentang fungsi anggaran yaitu **teori produksi** dan **teori konsumsi**. **Pada teori produksi**, fungsi anggaran mencerminkan batas maksimum kemampuan seorang produsen membeli dua macam *input* atau lebih, berkenaan dengan jumlah dana yang tersedia dan harga masing-masing *input*. Gambar dari fungsi anggarannya dikenal dengan sebutan isokos *(isocost)*. **Pada teori konsumsi**, fungsi anggaran mencerminkan batas maksimum kemampuan seorang konsumen membeli dua macam *output* atau lebih, berkenaan dengan jumlah pendapatannya dan harga masing-masing *output.* Gambar dari fungsi anggarannya dikenal dengan sebutan garis anggaran *(budget line).*

Bentuk umum persamaan fungsi anggaran,

$$\mathbf{M = x.\ Px + y.\ Py}$$

Teori Produksi		**Teori Konsumsi**	
M	: jumlah dana produsen	M	: jumlah pendapatan konsumen
x	: jumlah *input* X	x	: jumlah *output* X
y	: jumlah *input* Y	y	: jumlah *output* Y
Px	: harga X per unit	Px	: harga X per unit
Py	: harga Y per unit	Py	: harga Y per unit

Contoh 9 :

Bentuklah persamaan anggaran seorang konsumen untuk barang X dan barang Y apabila pendapatan yang disediakannya sebesar Rp. 100.000,- sedangkan harga barang X dan barang Y masing-masing Rp. 500,- dan Rp. 1.000,- per unit. Jika semua pendapatan yang dianggarkan dibelanjakan untuk barang X, berapa unit barang X dapat dibelinya ?. Berapa unit barang Y dapat dibeli kalau ia hanya membeli 100 unit barang X ?

Jawab :

$$\mathbf{M = x. Px + y. Py}$$

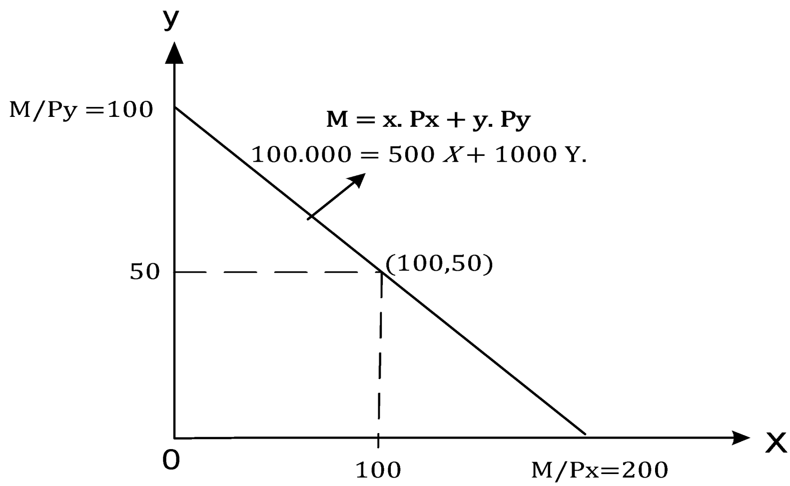
Persamaan anggarannya adalah 100.000 = 500 X + 1000 Y.

Jika semua pendapatan dibelanjakan untuk barang X (Y = 0), maka jumlah X yang dapat dibeli 100.000 = 500 X ⟶ X = 200 unit. Jika barang X dibeli sebanyak 100 unit maka,

$$100.000 = 500 (100) + 1000 Y$$

$$1000 Y = 50000$$

$$Y = 50 \text{ unit}$$



Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Suatu perusahaan menghasilkan produknya dengan biaya variabel per unit Rp.4.000,- dan harga jualnya per unit Rp.12.000,-. Manajemen menetapkan biaya tetap dari operasinya Rp.2.000.000,-. Tentukan jumlah unit produk yang harus perusahaan jual agar mencapai pulang pokok (BEP) ?
2. Sebuah produk mainan yang dihasilkan oleh PT.Abrakadabra dijual dengan harga Rp.20.000,- per unit.
   a. Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total perusahaan tersebut !
   b. Berapa besar penerimaan PT. Abrakadabra bila terjual barang sebanyak 300 unit ?

3. Apabila biaya total yang dikeluarkan PT.Abrakadabra ditunjukkan oleh persamaan C= 40.000+50Q dan penerimaan totalnya R = 300Q.
   a. Pada jumlah produksi berapa unit mainan PT. Abrakadabra ini berada dalam posisi pulang pokok (BEP) ?
   b. Apa yang akan terjadi jika PT. Abrakadabra memproduksi mainan sebanyak 600 unit ?

6. Fungsi Konsumsi, Tabungan, Angka Pengganda, Dan Pendapatan Disposabel

Pendapatan masyarakat suatu negara secara keseluruhan (pendapatan nasional) dalam ekonomi makro dialokasikan ke dua kategori penggunaan yaitu penggunaan konsumsi dan ditabung, Jika dimisalkan Y = pendapatan nasional, C = konsumsi, dan S=tabungan maka persamaannya adalah,

$$\mathbf{Y = C + S}$$

Konsumsi dan tabungan nasional pada umumnya dilambangkan sebagai fungsi linier dari pendapatan nasional. Keduanya berbanding lurus dengan pendapatan nasional. Jadi apabila semakin besar pendapatan maka konsumsi dan tabungan juga akan semakin besar, hal tersebut berlaku pula untuk kebalikkannya.

6.1. Fungsi Konsumsi

Fungsi konsumsi menjelaskan hubungan antara konsumsi dan pendapatan nasional, yang secara umum dirumuskan sebagai berikut,

$$\mathbf{C = f(Y) = C_o + cY}$$

Keterangan,

Co : konsumsi otonom

C : MPC = …C/…Y

konstanta C_o menunjukkan besarnya konsumsi nasional pada saat pendapatan nasional sebesar nol (mencerminkan konsumsi nasional minimum/*autonomous consumption*, konsumsi otonom) yang pasti harus tersedia walaupun pendapatan nasional nihil. Secara grafik C_o merupakan penggal kurva konsumsi pada sumbu vertikal C. Koefisien "c" mencerminkan besarnya tambahan konsumsi sebagai akibat adanya tambahan pendapatan nasional. Dalam bahasa ekonomi "c" adalah *Marginal Propensity Consume*.

6.2. Fungsi Tabungan

Fungsi tabungan menjelaskan hubungan antara tabungan dan pendapatan nasional yang secara umum bentuk persamaannya adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{S = g(Y) = S_o + sY}$$

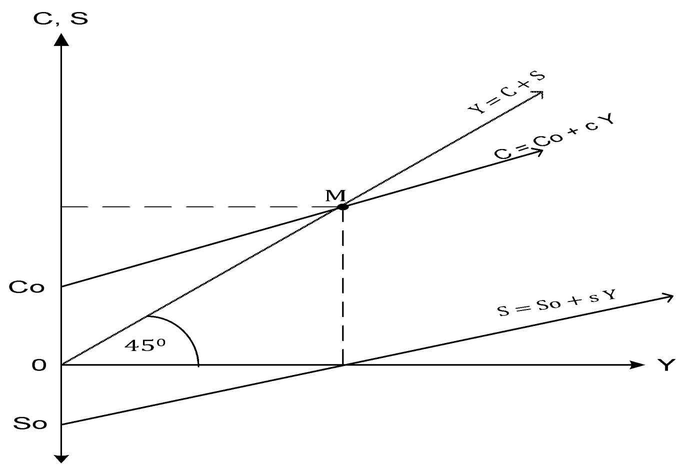
Keterangan,

So : tabungan otonom

s : MPS = …S/…Y

konstanta S_0 menunjukkan besarnya tabungan otonom *(autonomous saving)* merupakan penggal kurva tabungan pada sumbu vertikal S. Koefisien “s” adalah *Marginal Propensity to Save* merupakan lereng dari kurva tabungan.

Kurva konsumsi dan tabungan dapat digambarkan secara bersama-sama pada sistem sumbu silang seperti di bawah ini,



Garis bantu Y = C + S yang membentuk sudut 45^0 merupakan penjumlahan grafik kurva C dan kurva S. Pada titik M nilai S = 0, berarti seluruh pendapatan dialokasikan untuk keperluan konsumsi. Di sebelah kanan titik M pendapatan lebih besar daripada konsumsi sehingga kelebihan pendapatan tersebut bisa ditabung, hal ini tercermin dari positifnya kurva S. Sedangkan di sebelah kiri titik M pendapatan lebih kecil daripada konsumsi, berarti sebagian konsumsi dibiayai bukan dari pendapatan sendiri melainkan dari sumber lain misalnya pinjaman. Dalam kondisi ini t abungannya negatif *(dissaving)*. Pada titik O (0,0) seluruh konsumsi bahkan dibiayai bukan dari pendapatan, besarnya konsumsi sama dengan tabungan negatif.

Contoh 10 :

Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan $C = 30 + 0{,}8\ Y$.

a. Bagaimanakah fungsi tabungannya ?

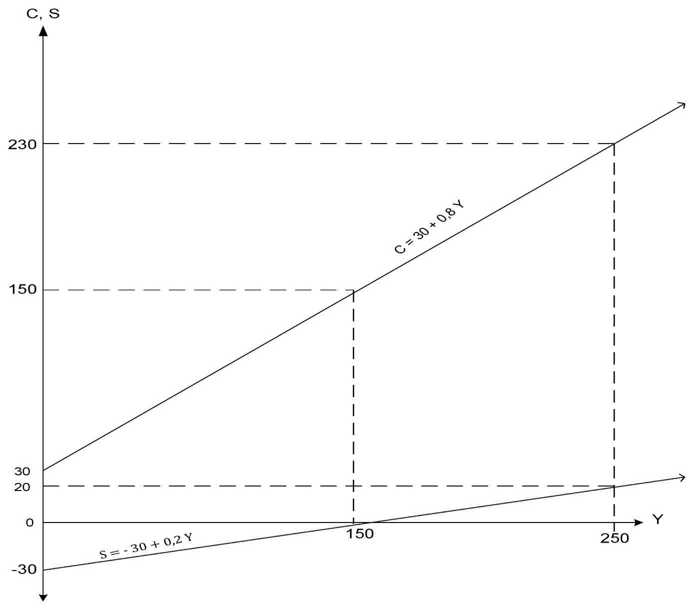
b. Bagaimanakah besarnya konsumsi jika tabungan sebesar 20 ?

Jawab :

a.
$$\begin{aligned} S &= Y - C \\ &= Y - (30 + 0{,}8\ Y) \\ S &= -30 + 0{,}2\ Y \end{aligned}$$

b. Jika besarnya S = 20 maka,
$$\begin{aligned} S &= -30 + 0{,}2\ Y \\ 20 &= -30 + 0{,}2\ Y \\ 0{,}2\ Y &= 50 \\ Y &= 250 \end{aligned}$$

Jadi besarnya konsumsi dengan tabungan sebesar 20 adalah $C = Y - S = 230$.



6.3. Angka Pengganda

Angka pengganda ialah suatu bilangan yang menjelaskan tambahan pendapatan nasional sebagai akibat adanya perubahan pada variabel-variabel tertentu dalam perekonomian. Rumus angka pengganda model sederhana adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{k = \frac{1}{1-c} = \frac{1}{s}}$$

Keterangan : c = MPC dan s = MPS

dari contoh 10 dengan nilai MPS = 0,2 berarti angka penggandanya k = 5. Artinya bahwa apabila variabel ekonomi tertentu (misalnya investasi atau pengeluaran pemerintah) ditambah sejumlah variabel tertentu, maka pendapatan nasional akan bertambah sebesar 5 kali variabel tersebut.

6.4. Pendapatan Disposabel

Pendapatan disposabel *(disposable income)* adalah pendapatan nasional yang secara nyata dapat dibelanjakan oleh masyarakat (tidak termasuk di dalamnya pendapatan pemerintah seperti pajak, cukai, dsb). Pengenaan pajak menyebabkan pendapatan disposabel berkurang sebesar pajak tersebut. Misalnya jika pendapatan nasional adalah Y, tetapi di dalamnya termasuk pendapatan pemerintah atau pajak sebesar T, maka pendapatan disposabel yang dapat dibelanjakan dan ditabung oleh masyakarat adalah sebesar $Y_d = Y - T$. Jadi pajak merupakan variabel yang memperkecil pendapatan disposabel.

Variabel yang memperbesar pendapatan dipsobel masyarakat adalah variabel pembayaran khusus dari pemerintah kepada masyarakat yang sifatnya merupakan pembayaran ekstra atau tunjangan (misalnya tunjangan pension, THR, gaji ke 13, dll). Pembayaran khusus yang bersifat ekstra dalam ekonomi makro dikenal dengan istilah **pembayaran alihan *(transfer payment).*** Misalnya jika pendapatan nasional sebesar Y, tetapi selain itu pemerintah memberikan pembayaran alihan sebesar R, maka pendapatan disposabelnya menjadi $Y_d = Y + R$.

Besarnya pendapatan disposabel dapat dirinci sebagai berikut,

- Apabila tidak terdapat pajak maupun pembayaran alihan maka,

$$\mathbf{Y_d = Y}$$

- Apabila hanya terdapat pajak maka,

$$\mathbf{Y_d = Y - T}$$

- Apabila hanya terdapat pembayaran alihan maka,

$$\mathbf{Y_d = Y + R}$$

- Apabila terdapat pajak dan pembayaran alihan maka,

$$\mathbf{Y_d = Y - T + R}$$

Memahami penjelasan di atas akhirnya kita dapat mengetahui bahwa variabel bebas dalam persamaan fungsi konsumsi dan fungsi tabungan sesungguhnya adalah pendapatan disposabel (Y_d) bukan pendapatan nasional (Y). Oleh karena itu rumus fungsi konsumsi dan fungsi tabungan menjadi,

$$\mathbf{C = f\,(Y_d) = Co + c\ Y_d}$$

$$\mathbf{S = g\,(Y_d) = So + s\ Y_d}$$

$$\mathbf{Y_d = C + S}$$

Contoh 11 :

Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan dengan persamaan $C = 30 + 0{,}8Y_d$. Jika pemerintah menerima pajak dari masyarakat sebesar 16 akan tetapi pemerintah juga memberi pembayaran alihan kepada masyarakat sebesar 6.

a. Berapakah konsumsi nasional seandainya pendapatan nasional pada tahun tersebut sebesar 200 ?

b. Berapakah tabungan nasional yang terkumpul ?

Jawab :

a. $Y_d = Y - T + R = 200 - 16 + 6 = 190$

$C = 30 + 0{,}8\ Y_d = 30 + 0{,}8\ (190) = 182$

b. $S = Y_d - C = 190 - 182 = 8$

Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Andaikan konsumsi nasional ditunjukkan oleh persamaan $C = 4{,}5 + 0{,}9\ Y_d$ dan pendapatan yang dapat dibelanjakan adalah Rp. 15 juta.
   a. Carilah fungsi tabungannya ?
   b. Berapa nilai konsumsi nasional ?
2. Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan dengan persamaan $C = 60 + 1{,}6Y_d$. Jika pemerintah menerima pajak dari masyarakat sebesar 32 akan tetapi pemerintah juga memberi pembayaran alihan berupa subsidi kepada masyarakat sebesar 12.

a. Berapakah konsumsi nasional seandainya pendapatan nasional pada tahun tersebut sebesar 400 ?

b. Berapakah tabungan nasional yang terkumpul ?

7. Fungsi Pajak, Investasi, Impor, Dan Pendapatan Nasional

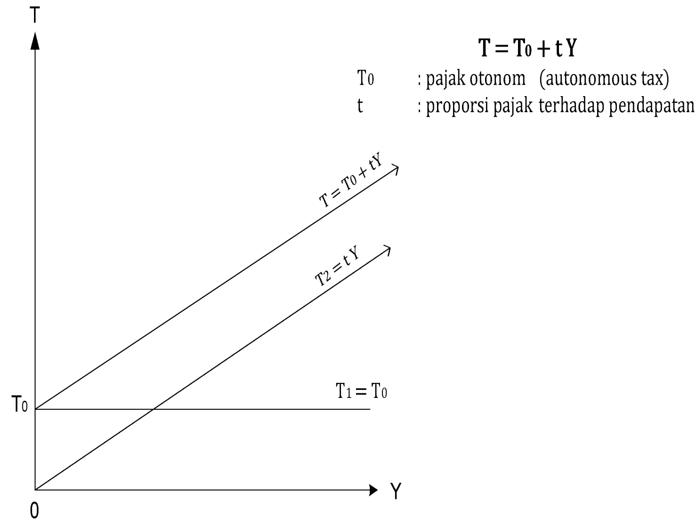
7.1. Fungsi Pajak

Terdapat dua model pajak yang dikenakan pemerintah kepada masyarakat yaitu,

a. **Pajak Jumlah Tertentu** (pajak yang tidak dikaitkan dengan tingkat pendapatan). Secara matematik dituliskan sebagai $\mathbf{T_1 = T_0}$. Kurvanya berbentuk sebuah garis lurus sejajar dengan sumbu pendapatan.

b. **Pajak yang ditetapkan sesuai dengan tingkat pendapatan**, besarnya merupakan proporsi atau persentase tertentu dari pendapatan. Secara matematik dituliskan sebagai $\mathbf{T_2 = t\ Y}$. Kurvanya berbentuk sebuah garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik pangkal.

Total pajak yang diterima oleh pemerintah adalah $\mathbf{T = T_0 + t\ Y}$, kurvanya berbentuk sebuah garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik T_0.



7.2. Fungsi Investasi

Permintaan investasi merupakan fungsi dari tingkat bunga, jadi jika investasi dilambangkan "I" dan tingkat bunga *(interest rate)* dilambangkan dengan "i" maka secara umum fungsi (permintaan akan) investasi dituliskan sebagai berikut,

$$\mathbf{I = f\ (i)}$$

$$\mathbf{I = I_0 - pi}$$

ket : I_0 = investasi otonom

Permintaan akan investasi berbanding terbalik dengan tingkat bunga. Artinya bila tingkat bunga tinggi maka orang akan lebih senang menyimpan uangnya di bank daripada menginvestasikannya.

Tingginya bunga juga mencerminkan mahalnya kredit, sehingga mengurangi gairah orang untuk berinvestasi. Hal sebaliknya akan terjadi jika tingkat bunga rendah.

Contoh 12 :

Jika permintaan akan investasi ditunjukkan dengan persamaan

$I = 250 - 500\ i$.

a. Berapakah besarnya investasi pada saat tingkat bunga bank 12% ?

b. Berapakah besarnya investasi pada saat tingkat bunga bank 30% ?

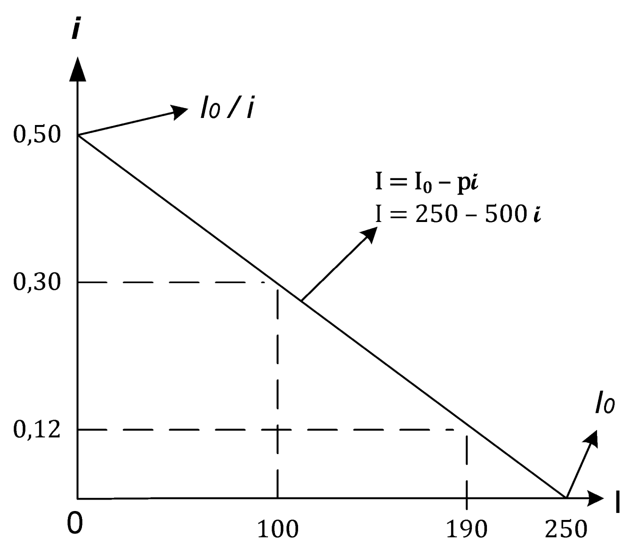
Jawab :

a. $I = 250 - 500\ i$, jika $i = 12\% = 0{,}12$ maka

$I = 250 - 500\ (0{,}12) = 250 - 60 = 190$

b. $I = 250 - 500\ i$, jika $i = 30\% = 0{,}30$ maka

$I = 250 - 500\ (0{,}30) = 250 - 150 = 100$



7.3. Fungsi Impor

Impor suatu negara merupakan fungsi dari pendapatan nasionalnya dan cenderung berkorelasi positif. Semakin besar pendapatan nasional suatu negara, semakin besar pula kebutuhan atau hasratnya akan barang-barang dari luar negeri (terutama barang modal, bagi negara yang sedang berkembang) sehingga nilai impornya semakin besar. Bentuk persamaannya adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{M = M_0 + m\ Y}$$

Keterangan,

M_0 : impor otonom

Y : pendapatan nasional

M : marginal propensity to import = ….M / …Y

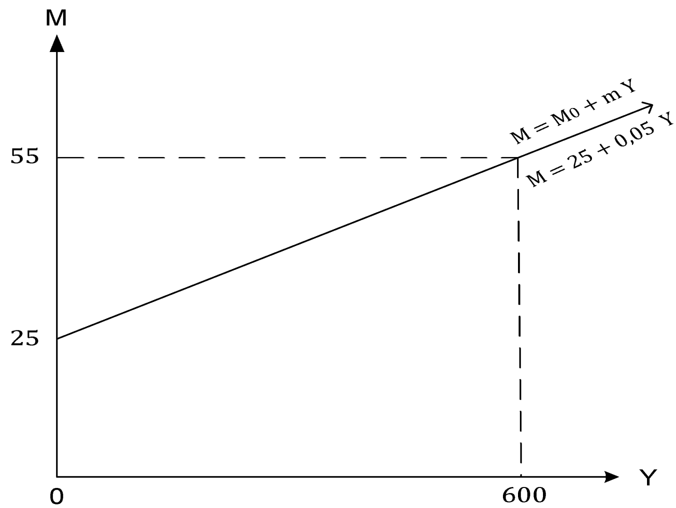
Contoh 13 :

Bentuklah persamaan impor suatu negara bila diketahui impor otonomnya 25 dan *marginal propensity to import* nya 0,05 ! Berapakah nilai impornya jika pendapatan nasional sebesar 600?

Jawab :

$$\left.\begin{matrix} \text{Mo} = 25 \\ \text{m} = 0{,}05 \end{matrix}\right\} \text{M} = \text{Mo} + \text{m Y} = 25 + 0{,}05\ \text{Y}$$

Jika Y = 600 maka M = 25 + 0,05 (600) = 25 + 30 = 55



7.4. Pendapatan Nasional

Pendapatan nasional adalah jumlah nilai seluruh output (barang dan jasa) yang dihasilkan oleh suatu negara dalam jangka waktu tertentu yang dilakukan oleh seluruh sektor perekonomian di suatu negara. Sektor-sektor perekonomian yang dimaksud adalah sektor rumah tangga, badan usaha, pemerintah, dan sektor perdagangan dengan luar negeri. Pengeluaran sector rumah tangga dicerminkan oleh konsumsi masyarakat (C), pengeluaran sector badan usaha dicerminkan investasi yang dilakukan oleh perusahaan-perusahaan (I), pengeluaran sector pemerintah dicerminkan oleh pengeluaran pemerintah (G), dan pengeluaran perdagangan dengan luar negeri tercermin dari selisih antara ekspor dan impor negara tersebut (X – M).

Ada tiga model perekonomian yang digunakan untuk menganalisis pendapatan nasional yaitu,

1. Model Perekonomian Sederhana (hanya ada dua sektor yaitu sektor rumah tangga dan badan usaha).

$$\mathbf{Y = C + I}$$

2. Model Perekonomian Tertutup (terdiri atas tiga sektor yaitu sektor rumah tangga, badan usaha, dan pemerintah).

$$\mathbf{Y = C + I + G}$$

3. Model Perekonomian Terbuka (terdiri atas empat sektor yaitu sektor rumah tangga, badan usaha, pemerintah, dan perdagangan dengan luar negeri).

$$\mathbf{Y = C + I + G + (X - M)}$$

Contoh 14 :

Hitunglah pendapatan nasional suatu negara jika diketahui konsumsi otonom masyarakatnya sebesar 500; MPS = 0,2; investasi yang dilakukan oleh sektor badan usaha = 300; pengeluaran pemerintah = 250; sedangkan nilai ekspor dan impornya masing-masing 225 dan 175 !

Jawab :

$$\left.\begin{array}{l} Co = 500 \\ c = MPC = 0{,}8 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C = Co + c\,Yd = 500 + 0{,}8\,Yd = 500 + 0{,}8\,Y \\ sebab\,Yd = Y - T + R = Y - 0 - 0 = Y \end{array}$$

Y = C + I + G + (X – M)

= 500 + 0,8 Y + 300 + 250 + (225 – 175)

0,2 Y = 1100

Y = 5500

Model perekonomian terbuka yang kompleks memerlukan perhitungan angka pengganda yang cukup rumit, karena selain terdapat variabel konsumsi (C), investasi (I), pemerintah (G), juga terdapat variabel pajak (T) dan pembayaran alihan (R) yang keduanya bersama-sama dengan impor(M) merupakan fungsi dari pendapatan nasional (Y). Kesamaan pendapatan nasionalnya menjadi sebagai berikut,

$$\mathbf{Y = \frac{1}{\quad} (Co - c\,To + c\,Ro + Io + Go + Xo - Mo)}$$

Angka penggandanya secara umum ialah,

$$\mathbf{k = \frac{1}{\quad}}$$

Dimana **…… = 1- c + ct – cr + m**

Contoh 15 :

Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan C = 1500 + 0,75 Y_d. Investasi dan pengeluaran pemerintah masing-masing 2000 dan 1000. Pajak yang diterima dan pembayaran alihan yang dilakukan pemerintah masing-masing dicerminkan dalam persamaan T = 500 + 0,25 Y dan R = 100 + 0,05 Y. Jika nilai ekspornya 1250 dan impornya dicerminkan dalam persamaan M=700+0,10 Y.

a. Hitunglah pendapatan nasional negara tersebut !

b. Hitunglah konsumsi, tabungan, pajak, pembayaran alihan dan nilai impornya !

c. Berapa pendapatan nasional yang baru seandainya pemerintah menaikkan pengeluarannya menjadi sama dengan nilai ekspor ?

Jawab :

Soal a

Yd = Y – T + R

= Y – 500 – 0,25 Y + 100 + 0,05 Y

= 0,80 Y – 400

Nilai konsumsi C = 1500 + 0,75 Yd = 1500 + 0,75 (0,80 Y – 400)

C = 1200 + 0,60 Y

Rumus pendapatan nasional :

Y = C + I + G+ (X –M)

= 1200 + 0,60 Y + 2000 + 1000 + 1250 – 700 – 0,10 Y

Y= 4750 + 0,50 Y $\longrightarrow$ 0,5 Y = 4750

Y = 9500

Jadi pendapatan nasional negara tersebut sebesar 9500.

Soal b

Sebelum mencari konsumsi, tabungan, pajak, pembayaran alihan dan nilai impor perlu diketahui terlebih dahulu pendapatan disposabelnya (Yd). Dari soal a diketahui bahwa Yd=0,80 Y - 400 = 0,80 (9500) – 400 = 7200. Jadi,

Konsumsi = C = 1500 + 0,75 Yd = 1500 + 0,75 (7200) = 6900

Tabungan = S = Yd – C = 7200 – 6900 = 300

Pajak = T = 500 + 0,25 Y = 500 + 0,25 (9500) = 2875

Pembayaran alihan= R = 100 + 0,05 Y = 100 + 0,05 (9500) = 575

Impor = M = 700 + 0,10 Y = 700 + 0,10 (9500) = 1650

Soal c

Untuk menghitung pendapatan nasional yang baru perlu dihitung angka penggandanya dahulu.

…… = 1- c + ct – cr + m = 1 – 0,75 + 0,75(0,25)-0,75(0,05)+0,10 = 0,5

$$k_G = \frac{1}{} = \frac{1}{0,5} = 2$$

G’ = X = 1250, berarti …..G = G’ – G = 1250 – 1000 = 250

…..Y = k_g x ….G = 2 x 250 = 500

Y’ = Y + …Y = 9500 + 500 = 10.000

Jadi pendapatan nasional yang baru sebesar 10.000

Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Jika permintaan akan investasi ditunjukkan dengan persamaan I = 500 – 1000 i, berapakah besarnya investasi pada saat tingkat bunga bank 12% ?
2. Persamaan konsumsi masyarakat di negeri Aladin ditunjukkan oleh persamaan C = 3000 + 1,5 Y_d. Sedangkan investasinya sebesar 4000 dan pengeluaran pemerintah sebesar 2000. Pajak di negeri Aladin tercermin dalam persamaan T = 1000 + 0,50Y, dan pembayaran alihan tercermin dalam persamaan R = 200 + 0,1 Y. Apabila nilai ekspornya sebesar 2500 dan nilai impornya tercermin dalam persamaan M = 1400 + 0,2 Y.
   a. Hitunglah pendapatan nasional negara tersebut !
   b. Hitunglah konsumsi, tabungan, pajak, pembayaran alihan dan nilai impornya!

8. Analisis Is – Lm Dan Keseimbangan Serempak

8.1. Analisis IS – LM

Dalam ekonomi makro pasar dibedakan berdasarkan objeknya dan dibagi menjadi tiga macam yaitu pasar barang (termasuk jasa), pasar uang (termasuk modal), dan pasar tenaga kerja. Analisis yang membahas keseimbangan serempak di pasar barang dan pasar uang dikenal dengan istilah analisis IS – LM. Alat analisis yang digunakan adalah kurva IS dan LM.

a. Kurva IS

Kurva IS ialah kurva yang menunjukkan keseimbangan antara pendapatan nasional dan tingkat bunga di pasar barang. Untuk model perekonomian sederhana (dua sektor), persamaan kurva IS dapat dibentuk dengan menyamakan persamaan investasi (I) terhadap persamaan tabungan (S). Bentuk umum persamaan kurva IS adalah,

$$\mathbf{Y = f\,(i) = Y_b - b\,i}$$

Dimana $\mathbf{Yb} = \frac{\mathbf{Io - So}}{\mathbf{s}}$; $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}}$

Contoh 16 :

Bentuklah persamaan dan gambarkan kurva IS untuk C = 500 + 0,80 Y dan I = 2000 -5000i

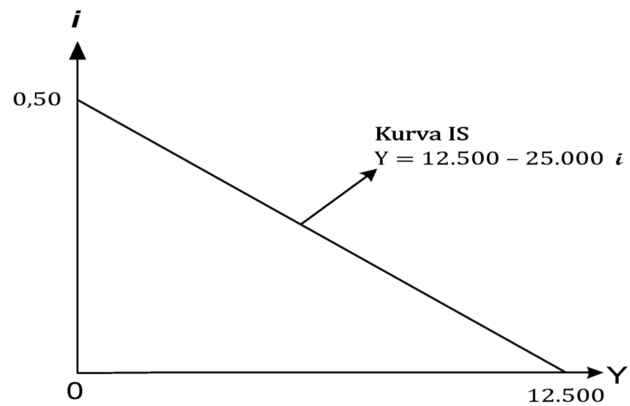
Jawab :

$$\left.\begin{aligned} C &= 500 + 0{,}80\text{ Y berarti,} \\ S &= -500 + 0{,}20\text{ Y} \\ I &= 2000 - 5000\text{ i} \end{aligned}\right\} I = S\text{, dimana } S = Y - C$$

$$I = S$$

$$2000 - 5000\,i = -500 + 0{,}20\,Y$$

$$Y = 12.500 - 25.000\,i$$



b. Kurva LM

Kurva LM ialah kurva yang menunjukkan keseimbangan antara pendapatan nasional dan tingkat bunga di pasar uang. Untuk model perekonomian sederhana (dua sektor), persamaan kurva LM dapat dibentuk dengan menyamakan persamaan permintaan akan uang (L, *Liquidity preference*) terhadap persamaan penawaran uang (M, *Money supply*).

Permintaan akan uang : L = Lo + k Y – h i

Penawaran uang : M = Mo

Bentuk umum persamaan kurva LM adalah,

$$\mathbf{Y = g\ (i) = Y_u - u\ i}$$

Dimana $\mathbf{Yu = \frac{Mo - Lo}{k}}$; $\mathbf{u = \frac{h}{k}}$

Contoh 17 :

Bentuklah persamaan dan gambarkan kurva LM jika permintaan akan uang ditunjukkan oleh L = 10.000 + 0,4 Y – 20.000i dan jumlah uang ditawarkan (beredar) sebesar 9.000.

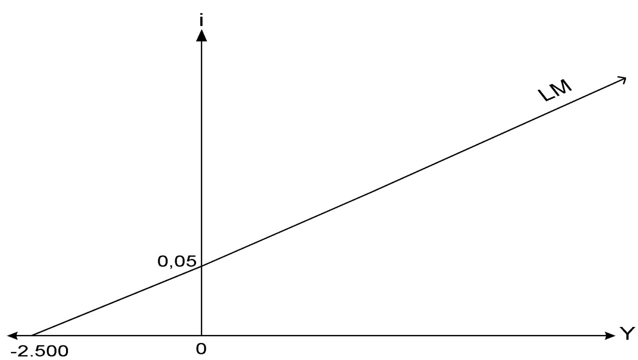
Jawab :

$$L = M$$

$$10.000 + 0{,}4\ Y - 20.000\ i = 9.000$$

$$0{,}4\ Y = -10.000 + 20.000\ i$$

$$Y = -2.500 + 50.000\ i$$



8.2. Keseimbangan Serempak

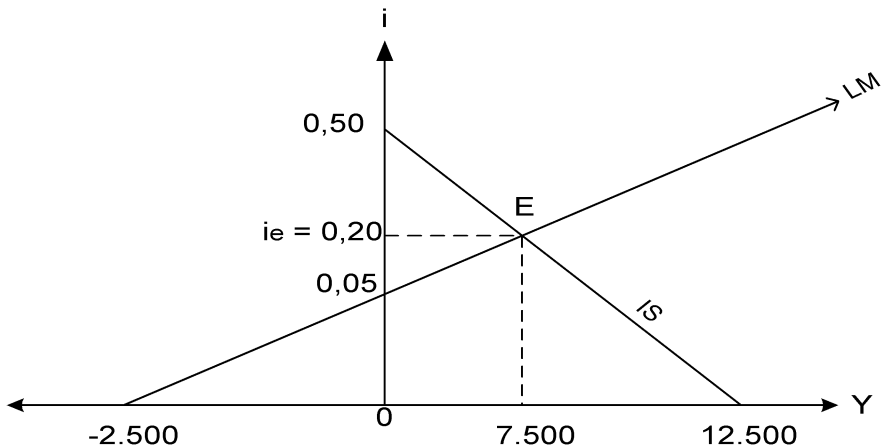
Keseimbangan serempak di pasar barang dan pasar uang ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva IS dan kurva LM. Pada posisi ini tercipta bunga keseimbangan dan pendapatan keseimbangan. Untuk contoh 17 keseimbangan serempak tercipta pada suku bunga 20% dan pendapatan nasional 7.500.

$$\textbf{IS} = \textbf{LM}$$

$$12.500 - 25.000\ i = -2.500 + 50.000\ i$$

$$15.000 = 75.000\ i$$

i = 0,20 ; Y = 7.500



Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Buatlah persamaan dan gambarkan kurva IS untuk C = 1000 + 0,80 Y dan

   I = 4000 -10000 i

2. a. Buatlah persamaan dan gambarkan kurva LM jika permintaan akan uang ditunjukkan oleh L = 5.000 + 0,2 Y – 10.000 i dan jumlah uang ditawarkan (beredar) sebesar 4.500.

   b. Berapa besar suku bunga dan pendapatan nasional agar keseimbangan serempak dapat tercipta ?

BAB 6

PENERAPAN FUNGSI NON LINEAR DALAM EKONOMI BISNIS

1. Pendahuluan

Setelah fungsi linier dipelajari, sekarang kita akan menyajikan jenis fungsi yang kedua yaitu fungsi non linier. Fungsi non linier ini dapat berperan berupa fungsi kuadrat dan fungsi rasional (fungsi pecah). Gambar dari fungsi ini bukanlah suatu garis lurus, melainkan suatu garis lengkung. Dalam bab ini akan disajikan fungsi kuadrat yang gambarnya berupa suatu parabola vertikal dan horizontal, fungsi rasional yang gambarnya berbentuk hiperbola, fungsi kubik, lingkaran dan elips.

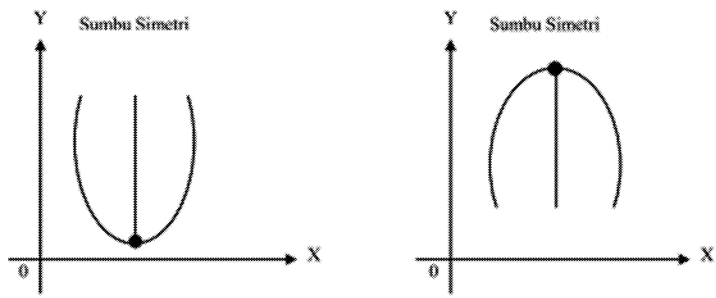
2. Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat dengan satu variabel bebas adalah fungsi polinomial tingkat dua, dimana fungsi ini mempunyai bentuk umum, Y = Fungsi (x) = $a_o + a_1x + a_2x^2$ atau bila koefisien-koefisien diubah, maka bentuknya adalah :

$$\mathbf{Y = f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Dimana : Y = Variabel terikat
x = Variabel bebas
a, b, dan c = konstanta dan $a \neq 0$

Bentuk ini bila digambarkan pada bidang koordinat akan mempunyai suatu parabola vertikal. Hal ini ditunjukkan dalam gambar berikut :



(a) Terbuka ke atas (b) Terbuka ke bawah

Pada gambar (a) parabola vertikal lengkung ke atas dan disebut sebagai parabola terbuka ke atas (a>0). Sedangkan gambar (b) parabola vertikal lengkung ke bawah dan disebut sebagai parabola terbuka ke bawah (a<0).

Suatu parabola mempunyai satu titik puncak. Titik puncak (vertex) adalah titik dimana arah perubahan fungsi dari naik ke menurun atau dari menurun ke naik. Dengan kata lain, titik puncak adalah titik yang paling bawah (dasar dari parabola bilamana parabola terbuka ke atas, titik paling atas dari parabola bilamana parabola terbuka ke bawah).

Koordinat titik puncak dari suatu parabola dapat diperoleh dengan rumus :

Titik Puncak = $\left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac}{4a}\right\}$

Dimana : a, b dan c adalah parameter atau konstanta dalam persamaan

Suatu parabola vertikal mempunyai sebuah sumbu simetri yang sejajar dengan sumbu Y. Sumbu simetri adalah suatu garis lurus yang melalui titik puncak dan membagi parabola menjadi dua bagian yang sama bentuknya.

Rumus Kuadrat (ABC)

Jika Y = 0, maka bentuk umum dari fungsi kuadrat $Y = ax^2 + bx + c$ akan menjadi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Nilai-nilai penyelesaian untuk X yang juga di sebut akar-akar dari persamaan kuadrat dapat diperoleh dengan cara memfaktorkan atau dengan menggunakan rumus kuadrat. Rumus kuadrat ini adalah:

$$\mathbf{X_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Suku di tanda akar pada persamaan yaitu $\mathbf{b^2 - 4ac}$ disebut diskriminan (D). Nilai diskriminan ini akan menentukan apakah parabola vertikal memotong, menyinggung atau tidak memotong maupun menyinggung sumbu X. Jika nilai $b^2 - 4ac$ adalah negatif maka tidak terdapat titik potong dengan sumbu X. Jadi, rumus kuadrat ini hanya di gunakan bila nilai $b^2 - 4ac$ positif atau sama dengan nol.

Macam-Macam Parabola

Tanpa melihat gambar parabola, titik maksimum dan titik minimum dapat ditentukan dengan melihat nilai parameter a dan nilai dari diskriminan (D). Berikut ini terdapat 6 kemungkinan bentuk parabola :

1. Jika a > o dan D > 0, maka parabola akan terbuka ke atas dan memotong sumbu X di dua titik yang berlainan.
2. Jika a > 0 dan D = 0, maka parabola akan terbuka ke atas dan menyinggung sumbu X di dua titik yang berhimpit.
3. Jika a > 0 dan D < 0, maka parabola akan terbuka ke atas dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu X.
4. Jika a < 0 dan D = 0, maka parabola akan terbuka ke bawah dan memotong sumbu X di dua titik yang berlainan.
5. Jika a < 0 dan D = 0, maka parabola akan terbuka ke bawah dan menyinggung sumbu X di dua titik yang berhimpit.
6. Jika a < 0 dan D < 0, maka parabola akan terbuka ke bawah dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu X.

Contoh :

Jika fungsi kuadrat $Y = X^2 - 16X + 24$, carilah koordinat titik puncak dan gambarkanlah parabolanya.

Penyelesaian :

$$\text{Koordinat titik puncak} = \left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right\}$$

$$= \left\{\frac{-16}{2}, \frac{-(256-96)}{4}\right\}$$

$$= (-8, -40)$$

Untuk X = 0, maka Y = 24

Titik potong sumbu X adalah (0, 24)

Untuk Y = 0, maka $X^2 - 16X + 24 = 0$

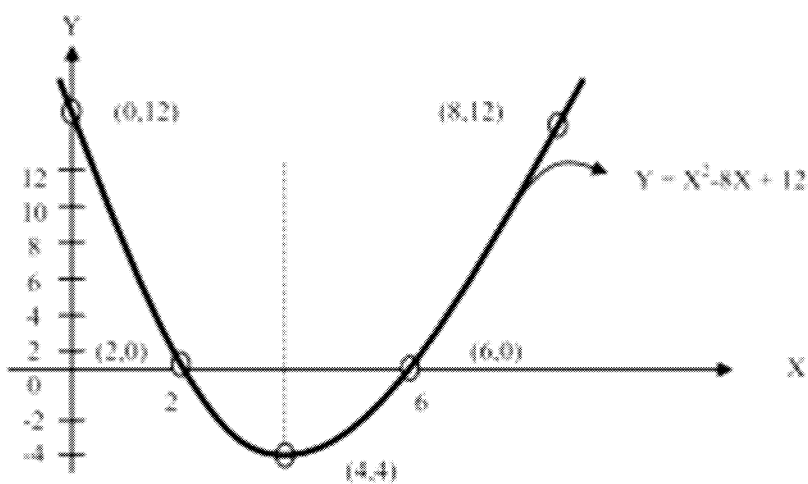
$$X_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256-96}}{2}$$

$$X_1 = \frac{16 + 12,65}{2} = 14,325$$

$$X_2 = \frac{16 - 12,65}{2} = 1,675$$

Titik potong sumbu X adalah (1,675;0) dan (14,325;0)

Berdasarkan nilai-nilai penyelesaian dari titik puncak dan titik potong sumbu X dan Y maka kurva parabolanya dapat digambarkan seperti berikut :



Contoh :

Diketahui fungsi kuadrat Y = 3 + 2X - X^2, carilah akar-akarnya dan gambarkanlah grafiknya.

Penyelesaian :

Jika X = 0, maka Y = 3, sehingga titik koordinatnya (0,3)

Jika Y = 0, 3 + 2X - X^2 = 0 atau

$X^2 - 2X - 3 = 0$

$(X - 3)(X + 1) = 0$

X_1 = 3 sehingga titik koordinatnya (3,0)

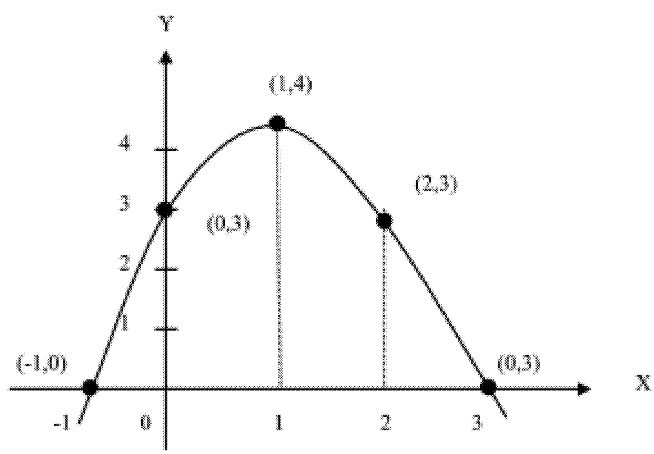
X_2 = -1 sehingga titik koordinatnya (-1, 0)

Koordinat titik puncak = $\left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right\}$

$= \left\{\frac{-2}{2}, \frac{-(2^2 - 4(-1)(3))}{4}\right\}$

$= \left\{\frac{-2}{2}, \frac{-16}{4}\right\}$ = (-2, 2)

Berdasarkan nilai-nilai penyelesaian dari titik puncak dan titik potong sumbu X dan Y maka kurva parabolanya dapat digambarkan seperti pada gambar berikut :



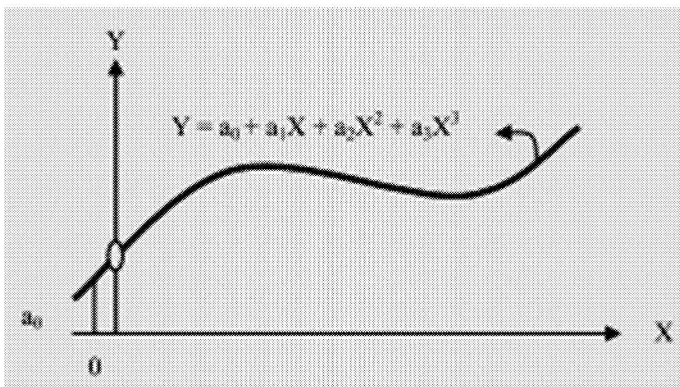
3. Fungsi Pangkat Tiga

Polinomial tingkat 3 dengan satu variabel bebas disebut sebagai fungsi kubik dan mempunyai bentuk umum :

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

Dimana : a_3 tidak sama dengan nol

Fungsi kubik ini bila digambarkan dalam bidang koordinat Cartersius, kurvanya mempunyai dua lengkung *(concave)* yaitu lengkung ke atas dan lengkung ke bawah seperti tampak pada gambar berikut :



4. Fungsi Rasional

Suatu fungsi rasional mempunyai bentuk umum :

$$Y = \frac{g\ (X)}{h\ (X)} = \frac{a_n{}^{X^n} + a_{n-1}{}^{X^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1 X + a_0}{b_m{}^{X^0} + b_{m-1}{}^{X^{m-1}} + \ldots\ldots + b_1 X + b_0}$$

Dimana :

G (X) = Fungsi polinomial tingkat ke-n

H (X) = Fungsi polinomial tingkat ke-m dan tidak sama dengan nol

Fungsi rasional ini bila digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius kurvanya akan berbentuk hiperbola dan mempunyai sepasang sumbu asimtot. Sumbu asimtot adalah sumbu yang didekati kurva hiperbola tetapi tidak pernah menyinggung.

Fungsi rasional yang istimewa dan sering ditetapkan dalam ilmu ekonomi adalah berbentuk:

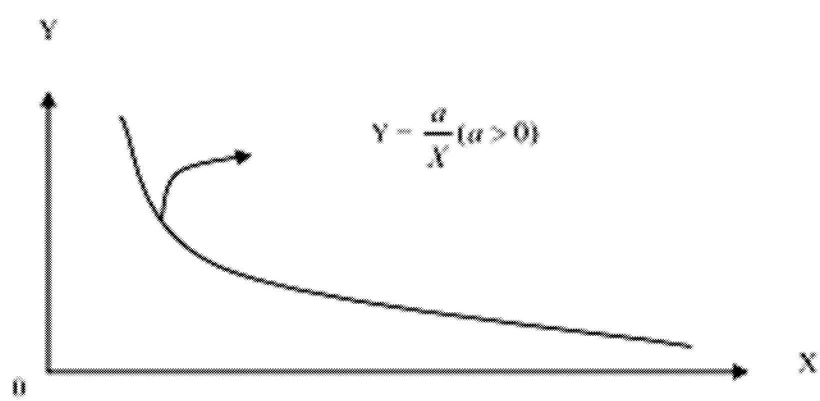
$$\mathbf{Y = \frac{a}{X} \text{ atau } XY = a}$$

Dimana : a > 0

Bentuk fungsi rasional diatas kurvanya adalah hiperbola segi empat dan mempunyai satu sumbu asimtot tegak yang berimpit dengan sumbu Y dan satu sumbu asimtot datar yang berimpit dengan sumbu Y. Jadi, bila nilai Y diperbesar, kurva hiperbola akan mendekati sumbu Y dan bila nilai X diperbesar kurva hiperbola akan mendekati sumbu X. Hal ini ditunjukan dalam gambar berikut :

Jika sumbu asimtot tegak tidak berimpit dengan sumbu Y dan sumbu asimtot datar tidak berimpit dengan sumbu Y, maka bentuk umum dari fungsi rasional adalah :

$$\mathbf{(X - h)(Y - k) = C}$$



Dimana : h = Sumbu asimsot tegak

k = Sumbu asimsot datar

(h, k) = Pusat hiperbola

C = Konstanta positif

Contoh :

Jika diketahui fungsi rasional Y = $\frac{18}{X}$, gambarkanlah kurva hiperbolanya ?

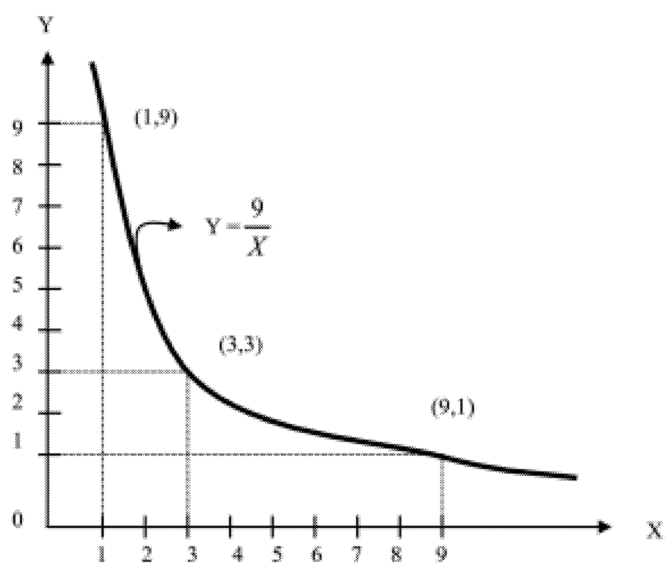
Penyelesaian :

Jika X = 2, maka Y = 9, sehingga titik koordinatnya (2,9)

Jika X = 6, maka Y = 3, sehingga titik koordinatnya (6,3)

Jika X = 18, maka Y = 1, sehingga titik koordinatnya (18,1)

Kurva hiperbola ini ditunjukkan oleh gambar sebagai berikut :



Contoh

Jika diketahui fungsi (X + 3) (Y + 4), gambarkanlah kurva hiperbolanya ?

Penyelesaian :

Sumbu asimtot tegak X = h = -3

Sumbu asimtot Y = k = -4

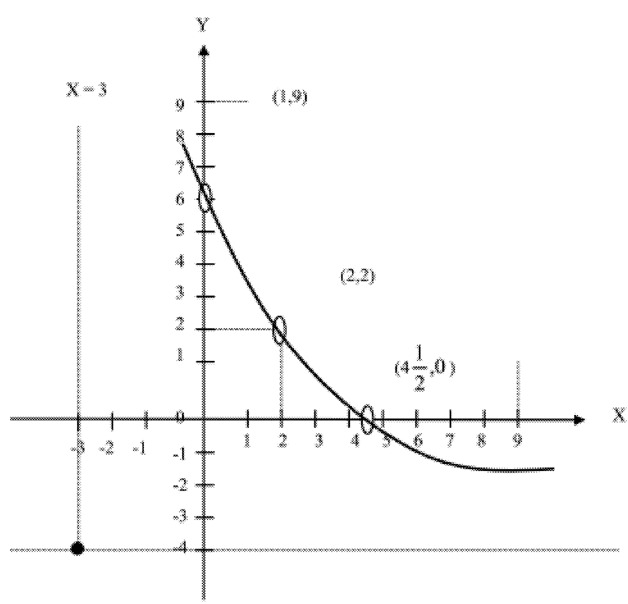
Jadi, titik pusat hiprbola (-3, -4)

Jika X = 0, maka Y = 6, sehingga titik koordinatnya (0,6)

Jika X = 0, maka Y = 4,5, sehingga titik koordinatnya (4,5,0)

Jika X = 2, maka Y = 2, sehingga titik koordinatnya (0,6)

Berdasarkan nilai sumbu asimtot tegak dan datar serta titik-titik koordinat, maka kurva hiperbola dapat digambarkan seperti gambar dibawah ini :



5. Elips

Secara geometri, elips didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik dalam bidang yang jumlah jarak dua titiknya konstan. Suatu elips mempunyai dua sumbu simetri yang saling tegak lurus. Sumbu yang panjang disebut sumbu utama dan sumbu pendek disebut sumbu minor. Titik potong sumbu-sumbu tersebut adalah titik pusat elips.

Bentuk umum dari persamaan elips adalah :

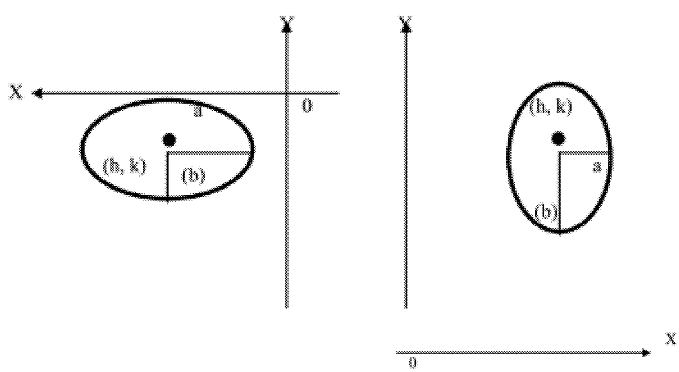
$$\mathbf{AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0}$$

Dimana : A = tidak sama dengan C

D dan C mempunyai tanda yang sama

Bentuk umum elips ini dapat diubah ke dalam bentuk standar elips menjadi :

$$\frac{(X-h)^2}{a^2} + \frac{(Y-K)^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$= 1$$

(a) a > b

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}$$

(b) a < b

Dimana (h,k) adalah pusat elips dan sumbu utama sejajar dengan sumbu X apabila a > b dan sumbu utama sejajar dengan sumbu Y apabila a < b. Gambarnya dapat dilihat pada gambar diatas.

Contoh :

Tentukanlah titik pusat, jari-jari pendek dan panjang dari persamaan elips

$4X^2 + 9Y^2 + 16X - 18Y - 11 = 0$

Penyelesaian :

$4X^2 + 9Y^2 + 16X - 18Y - 11 = 0$

$4X^2 + 16 X^2 + 9Y^2 + 16X - 18Y - 11 = 0$

$4 (X^2 + 4X) + 9 (Y^2 - 2Y) - 11 = 0$

$4 (X^2 + 4X + 4) + 9 (Y^2 - 2Y + 1) = 11 + 16 + 9$

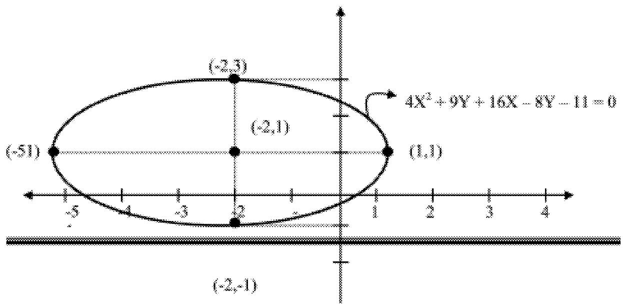
$4 (X + 2)^2 + 9 (Y - 1)^2 = 36$

Pusat elips (-2, 1)

Jari-jari panjang $a^2 = 9$, maka $a = \sqrt{9} = 3$

Jari-jari pendek $b^2 = 4$, maka $b = \sqrt{4} = 2$

Persamaan elips ini ditunjukkan oleh gambar ini.



Penerapan Fungsi Non Linear Dalam Bisnis Dan Ekonomi

1. Pendahuluan

Hubungan fungsional antara variabel-variabel ekonomi dan bisnis tidak selalu berbentuk linier tetapi juga yang berbentuk tetap (konstan). non linier, artinya perubahan suatu variabel terikat (dependent) yang diakibatkan oleh perubahan variabel bebas (independent) tidak

2. Fungsi Permintaan

Fungsi permintaan yang telah disajikan sebelumnya adalah fungsi permintaan linier. Tetapi dalam sub bab ini akan dibahas fungsi permintaan yang non linier, berupa fungsi kuadrat dan fungsi rasional.

Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi permintaan kuadrat P = f(Q) adalah :

$$\mathbf{P = C + bQ - aQ^2}$$

Dimana P = harga produk

Q = jumlah produk yang diminta

a,b,c adalah konstanta dan $a < 0$

karena parameter $a < 0$ pada kesempatan ini maka parabola akan terbuka ke bawah. Gambar parabola terbuka ke bawah ini menunjukkan kurva permintaan. Sebaliknya bentuk umum fungsi permintaan kuadrat $Q = f(P)$ adalah:

$$\mathbf{Q = c + bP - aP^2}$$

Karena parameter $a < 0$ pada persamaan di atas maka parabola akan terbuka ke kiri. Gambar yang terbuka ke kiri ini juga menunjukkan kurva permintaan. Jadi, untuk fungsi permintaan kuadrat baik yang berbentuk $P = f(Q)$ ataupun $Q = f(P)$ grafiknya hanya diambil dari sebagian parabola yang terletak di kuadran I.

Contoh:

Jika fungsi permintaan adalah $P = 16 - Q^2$, gambarkanlah fungsi permintaan tersebut dalam satu diagram ini.

Penyelesaian:

Jika $Q = 0$, maka $P = 16$ sehingga titik potong sumbu P adalah (0,16)

Jika $P = 0$, maka $0 = 16 - Q^2$

$Q\ 2 = 16$

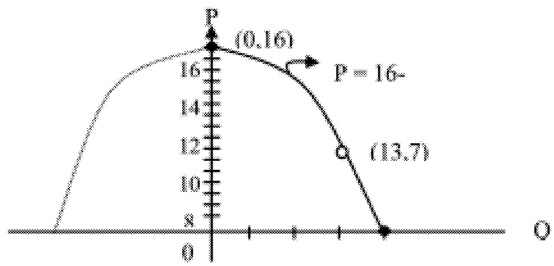
$Q\ 1 = +4$

$Q\ 2 = -4$ (tidak memenuhi)

Jadi titik potong dengan sumbu Q adalah (4,0) dan (-4,0)

Jika Q = 3, maka P = 7, sehingga titik koordinatnya (3,7)

Berdasarkan titik-titik potong dengan sumbu Q dan P serta titik koordinat maka gambar dari fungsi permintaan $P = 16 - Q^2$ dapat digambarkan seperti gambar ini.



Contoh

Jika fungsi permintaan adalah $Q = 64 - 8P - 2P^2$, gambarkanlah fungsi permintaan tersebut dalam satu diagram.

Penyelesaian

Jika P = 0, maka Q = 64, sehingga titik potong dengan sumbu Q adalah (64,0)

Jika Q = 0, maka $64 - 8P - 2P^2 = 0$ atau

$P^2 + 4P - 32 = 0$

$(P + 8)(P - 4) = 0$

$P = -8$ (tidak memenuhi)

$P = 4$

Contoh

Jika fungsi permintaan adalah PQ = 16, gambarkanlah fungsi tersebut!

Penyelesaian:

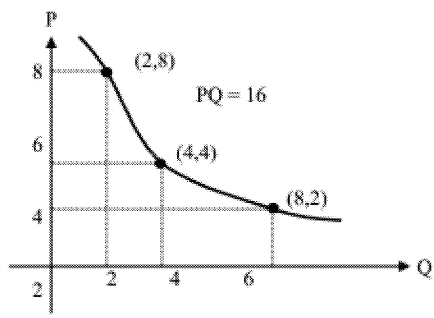
Bentuk fungsi permintaan seperti ini sumbu asimtot berimpit dengan sumbu P dan sumbu Q

Jika P = 2, maka Q = 8 sehingga titik koordinatnya (8,2)

Jika P = 4, maka Q = 4 sehingga titik koordinatnya (4,4)

Jika P = 8, maka Q = 2 sehingga titik koordinatnya (2,8)

Jadi berdasarkan titik-titik potong dengan sumbu Q dan peserta titik koordinat, maka gambar dari fungsi permintaan PQ =16 dapat digambarkan seperti pada gambar berikut.



Contoh:

Bila fungsi permintaan suatu produk adalah (Q+2)(P+3) = 18 gambarkanlah grafiknya:

Penyelesaian

Sumbu asimtot tegak sejajar dengan sumbu P = -3

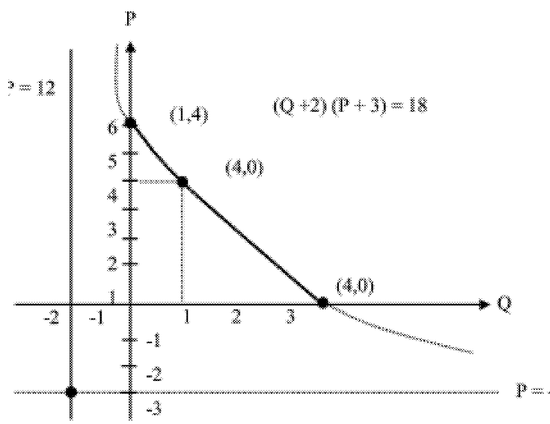
Sumbu asimtot tegak sejajar dengan sumbu Q = -2

Jika P = 0, maka Q = 4, sehingga titik potong dengan sumbu Q adalah (4,0)

Jika P = 3, maka Q =1, sehingga titik koordinatnya (1,3)

Jika Q = 0, maka P = 6, sehingga titik potong dengan sumbu P adalah (0,6)

Jadi, berdasarkan titik-titik potong dengan sumbu Q dan P serta titik koordinat, maka gambar dari fungsi permintaan (Q + 2)(P +3) =18 digambarkan seperti pada gambar berikut ini.



3. Fungsi Penawaran

Bentuk umum fungsi penawaran kuadrat P = f(Q) adalah :

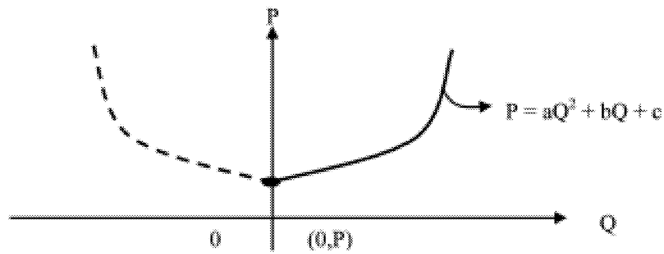
$$\mathbf{P = c + bQ + aQ^2}$$

Dimana : P = Harga Produk

Q = Jumlah produk yang ditawarkan

a,b,c adalah konstanta dan $a > 0$

Karena parameter $a > 0$ pada persamaan, maka parabola akan terbuka ke atas. Gambar dari parabola yang terbuka ke atas ini menunjukkan kurva penawaran dan gambarnya dapat dilihat pada gambar berikut ini.



Sedangkan bila fungsi penawaran kuadrat berbentuk Q = f(P), maka bentuk umumnya adalah:

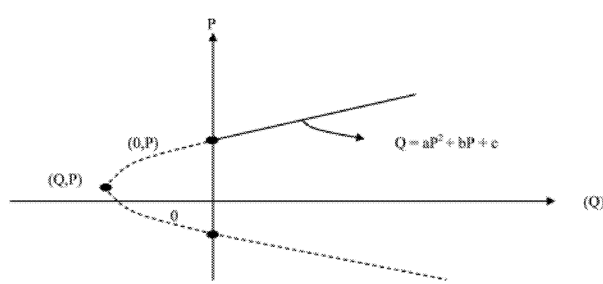
$Q = c + bP + aP^2$

Dimana Q = jumlah produk yang ditawarkan

P = harga produk

a,b, dan c adalah konstanta dan a > 0

karena parameter a > 0 pada persamaan, maka parabola akan terbuka ke kanan. Gambar parabola yang terbuka ke kanan ini menunjukan kurva penawaran dan gambarnya seperti tampak pada gambar berikut:



Contoh:

Jika fungsi penawaran ditunjukkan oleh $P = 2Q^2 + 4Q + 6$, gambarkanlah fungsi penawaran tersebut.

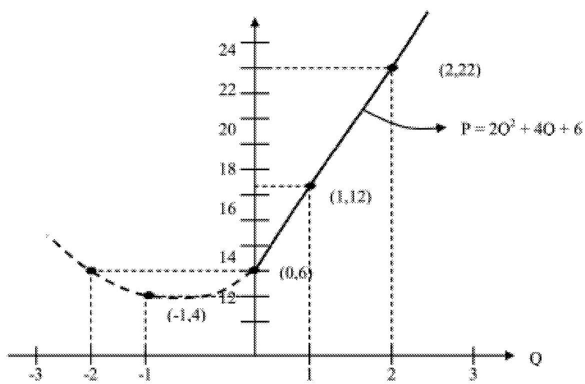
Penyelesaian:

Jika Q = 0, maka P = 6 sehingga titik potong dengan sumbu P adalah (0,6)

Jika Q = 1, maka P = 12 sehingga titik koordinatnya (1,12)

Jika Q = 2, maka P = 22 sehingga titik koordinatnya (2,22)

Jadi berdasarkan titik potong dengan sumbu P dan titik koordinat, maka gambar dan fungsi penawaran $P = 2Q^2 + 4Q + 6$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Contoh :

Fungsi penawaran ditunjukkan oleh $Q = 5P^2 - 10P$, gambarkanlah fungsi tersebut!

Penyelesaian:

Jika Q = 0, maka $5P^2 - 10P = 0$

$$5P\,(P-2) = 0$$

$$P\ 1 = 0$$

$$P\ 2 = 0$$

Jadi titik potong dengan sumbu P adalah (0,0) dan (0,2)

Jika P = 3 , maka Q = 15 sehingga titik koordinatnya (15,3)

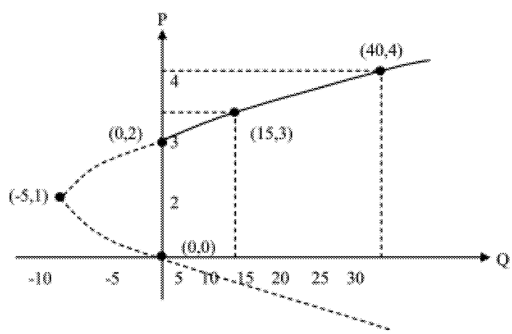
Jika P = 4, maka Q = 40 sehingga titik koordinatnya (40,4)

Koordinat titik puncak = $\left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right\}$

$= \left\{\frac{10}{10}, \frac{-(100-(4)(5)(0))}{4(5)}\right\}$

$= (1, -5)$

Jadi berdasarkan titik-titik potong dengan sumbu Q dan P serta titik koordinat, maka gambar dari fungsi permintaan $Q = 5P^2 - 10P$ dapat digambarkan seperti pada gambar berikut:



Contoh :

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan Q d = 19 –P; sedangkan penawarannya $Q = -8 + 2P^2$. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar?

Keseimbangan pasar : Q d = Q s

$19 - P^2 = -8 + 2P^2$

$27 = 3P^2$, $P^2 = 9$, $P = 3$

$Q = 19 - P^2 = 19 - 3^2 = 10$

Jadi , $P_e = 3$ dan $Q_t = 10$

Jika misalnya terhadap barang yang bersangkutan dikenakan pajak spesifik sebesar 1 (rupiah) per unit, maka persamaan penawaran sesudah pengenaan pajak menjadi:

$Q'\ s = -8 + 2\ (P - 1)^2 = -8 + 2\ (P^2 - 2P + 1) = -6\ -4P + 2P^2$

keseimbangan pasar yang baru : $Q\ d = Q'\ s$

$$19 - P^2 = -6 - 4P + 2P^2$$

$$3P^2 - 4P - 25 = 0$$

Dengan rumus abc diperoleh $P_1 = 3{,}63$ dan $P_2 = -2{,}30$, P_2 tidak dipakai karena harga negatif adalah irrasional.

Dengan memasukkan $P = 3{,}63$ kedalam persamaan Q_d atau persamaan Q'_s diperoleh $Q = 5{,}82$

Jadi dengan adanya pajak : $P'_e = 3{,}63$ $Q'_e = 5{,}82$

Selanjutnya dapat dihitung beban pajak yang menjadi tanggungan konsumen dan produsen per unit barang, serta jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah, masing-masing:

$tk = P'_e - P_e = 3{,}63 - 3 = 0{,}63$

$tp = t - tk = 1 = 0{,}63 = 0{,}37$

$T = Q'_e\ xt = 5{,}82 \times 1 = 5{,}82$

4. Keseimbangan Pasar

Sebagaimana telah disebutkan sebelumnya, bahwa jumlah dan harga keseimbangan pasar dapat diperoleh secara geometri dengan menggambarkan kurva permintaan dan kurva penawaran secara berama-sama dalam satu diagram. Disamping itu juga keseimbangan pasar dapat diperoleh secara aljabar dengan memecahkan fungsi permintaan dan fungsi penawaran melalui metode eliminasi atau metode substitusi. Dalam sub bab ini kita akan mencari nilai keseimbangan pasar, dimana fungsi permintaan atau fungsi penawaran berbentuk non linier. Kombinasi perpotongan fungsi permintaan dan penawaran ini atau nilai keseimbangan pasar mempunyai delapan gambar keseimbangan pasar.

Contoh:

Carilah secara aljabar dan geometri harga dan jumlah keseimbangan dari fungsi permintaan dan penawaran berikut ini:

$P_d = 24 - 3Q^2$

$P_s = Q^2 + 2Q + 4$

Penyelesaian :

Syarat keseimbangan pasar adalah P d = P s

$$24 - 3Q^2 = Q^2 + 2Q + 4$$

$$4Q^2 + 2Q - 20 = 0$$

$Q_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - \{(4)(4)(-20)\}}}{8} = Q_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{624}}{8}$

$Q_1 = \frac{-2 + 18}{8} = 2$

$Q_2 = \frac{-2 - 18}{8} = -2{,}5$ (tidak memenuhi)

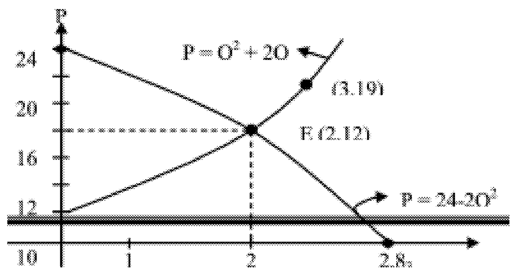
Substitusikan nilai Q yang memenuhi ke dalam satu persamaan permintaan atau penawaran, sehingga diperoleh nilai P yaitu :

P = 24 – 3 (2)

P = 24 – 12 = 12

Jadi, jumlah dan harga keseimbangan pasar adalah E (2,12)

Selanjutnya berdasarkan fungsi permintaan P d $= 24 - 3Q^2$ dan fungsi penawaran $P_s = Q^2 + 2Q + 4$, maka gambar dari keseimbangan pasar dapat digambarkan seperti
pada gambar di bawah ini:



Contoh :

Carilah secara aljabar dan geometri harga dan jumlah keseimbangan dari fungsi
permintaan dan penawaran berikut ini:

$Q_d = 9 - P^2$

$Q_s = P^2 + 2P - 3$

Penyelesaian:

Syarat keseimbangan pasar adalah $Q_d = Q_s$

$9 - P^2 = P^2 + 2P - 3$

$2P^2 + 2P - 12 = 0$

$P_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{\{(4)(2)(-12)\}}}{4} = Q_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{4}$

$P_1 = \frac{-2 + 110}{4} = 2$

$P_2 = \frac{-2 - 10}{4} = -3$ (tidak memenuhi)

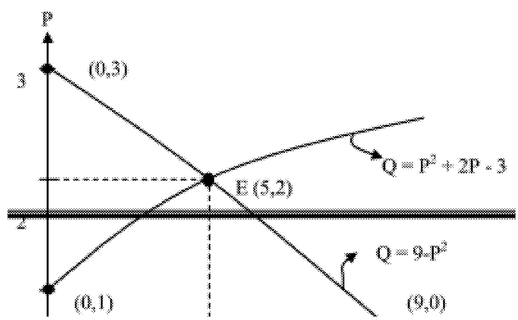
Substitusikan nilai P yang memenuhi ke dalam salah satu persamaan permintaan atau penawaran sehingga diperoleh nilai Q yaitu:

$Qd = 9 - (2)^2$

$Qd = 9 - 4 = 5$

Jadi jumlah dan harga keseimbangan pasar adalah E (5,2)

Selanjutnya berdasarkan fungsi permintaan $Q_d = 9 - p_2$ dan fungsi penawaran $Q_s = P^2 + 2P - 3$ maka gambar dari keseimbangan pasar dapat digambarkan seperti pada gambar ini.



Contoh:

Carilah secara aljabar dan geometri harga dan jumlah keseimbangan dari fungsi permintaan PQ = 30 dan penawaran

$Q = 3P - 9$

Penyelesaian:

Jika fungsi penawaran $Q = 3P - 9$ disubstitusikan ke dalam fungsi permintaan $PQ = 30$, maka akan menghasilkan persamaan baru yaitu:

P (3P – 9) = 30

$3P^2$ – 9P – 30 = 0 atau

P – 3P – 10 = 0

(P – 5)(P + 2) = 0

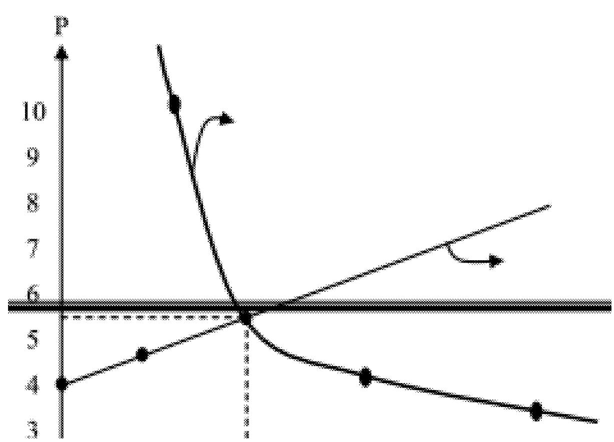
P_1 = 5 (memenuhi)

P_2 = -2 (tidak memenuhi)

Substitusikan nilai P yang memenuhi kedalam salah satu persamaan permintaan atau penawaran sehingga memperoleh nilai Q

$Q = \frac{30}{5} = 6$

Jadi, jumlah dan harga keseimbangan pasar adalah E (6,5) selanjutnya berdasarkan fungsi permintaan Q_d = 30 dan fungsi penawaran Q_s = 3P – 9 maka gambar dari keseimbangan pasar dapat digambarkan seperti pada gambar berikut:



DAFTAR PUSTAKA

Anwar, Cecep, dkk. 2008. *Matematika Aplikasi*. Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Naional.

Badrudin, R dan Algifari. 2008. *Matematika Bisnis.* BPFE Yogyakarta

Du Mairy. 2007. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi.* BPFE Yogyakarta

Frensidi, B. 2011. *Matematika Keuangan.* Salemba Empat. Jakarta

Kalangi, J.B. 2011. *Matematika Ekonomi dan Bisnis.* Salemba Empat. Jakarta

Sunyoto, D. 2011*. Matematika Ekonomi dan Bisnis.* CAPS.

Sulistiyono. 2007. *SPM Matematika.* Erlangga.

http://elearning.gunadarma.ac.id/docmodul/matematika_ekonomi/bab1-beberapa_konsep_matematika.pdf

https://ekomath93.files.wordpress.com/2011/09/bab-i-himpunan2.pdf

https://listy2812.files.wordpress.com/2014/01/bahan-ajar-kls-x-semester-1.pdf

http://bocoran-ilmu.blogspot.co.id/2013/10/sifat-sifat-logaritma-dan-contohnya.html

airymathunswagati.weebly.com/uploads/.../barisan_dan_deret_anna_nurkhasanah.pdf

yuli_fitriyani.staff.gunadarma.ac.id/Downloads/files/.../BARISAN+DAN+DERET.pdf

ikubarunovryan.blogspot.com/2012/12/aplikasi-baris-dan-deret-dalam-ekonomi.html

ISBN 978-623-91228-3-6

9 786239 122836

Penerbit
Lembaga Penelitian dan Pengabdian Pada Masyarakat
Jalan Pakuan No. 1 PO BOX 453 Ciheuleut Bogor
Telp. (0251) 8380137, email : lppm@unpak.ac.id